Eksamen 22. mai 2012. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
Rett svar:	C	C	D	D	B	E	C	B	A	C	E

Detaljer om spørsmålene:

a) C. Feltfritt i metallet gir at 1 forkastes. Totalladning $-Q$ (negativ) gjør at ytterste feltlinjer må gå innover. Med én Q representert ved fire feltlinjer ser vi at C er rett.

b) C. $E = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}r$ gir at 3 er riktig. Det er fritt valgt referansepunkt for V men ikke for E, slik at E ikke kan være null når V øker.

c) D. Gauss lov: $\epsilon_0 2\pi r \cdot \ell \cdot E(r) = \lambda \cdot \ell$ gir $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0} = 2k\lambda/r$.

d) D. I horisontal retning (tiltrekning neg. ladn.) overskuddskraft mot venstre. I vertikal retning (frastøtning pos. ladn.) overskuddskraft oppover. Totalt opp til venstre.

e) B. Ladningen er lik over alle kondensatorer: $Q = CV$, slik at spenning og kapasitans er omvendt proporsjonale.

f) E. Da spenningsforsyning er kopla fra er ladningen Q konstant. Kapasitansen øker slik at spenning $V = Q/C$ og $E = V/d$ avtar.

g) C. Utenfor sylinder avtar B-feltet som $1/r$, innenfor sylinder øker B lineært med r. Dette kan beregnes fra Amperes lov (som gjort i forelesning), eller dette viktige sylindereksemplet (tilsvarende for $E(r)$ bør kanskje huskes.

h) B. Elektrisk felt og magnetisk moment er vektorstørrelser.

i) A. Når magneten nærmer seg strømsløyfa øker magnetfluksen nedover inni sløyfa. Ifølge Lenz' lov settes opp en strøm som motvirker økningen, og ifølge høyrehåndsregelen må strømmen gå i positiv retning gitt i figuren. Når magneten er midt i øker ikke fluksen lenger, for deretter å avta. Da blir strømretningen motsatt. Altså figur 1 rett.

j) C. B-feltet fra AB har i strømsløyfa retning ned i papirplanet slik at kraft på øvre horisontale del av rektangelet etter h.h.regelen har retning oppover (tiltrekkende), mens kraft på nedre delen er nedover (frastøtende). Feltet fra den rette lederen AB avtar som $1/r$, slik at B-feltet og kraften er størst på øvre horisontale del med minst r. Derfor netto tiltrekkende kraft.

k) E. B-feltet fra AB har ved punktladningen retning ned i papirplanet. Hastigheten er (anti)parallell med B-feltet og det er ingen magnetisk kraft: $\vec{v} \times \vec{B} = \vec{0}$.

Oppgave 2. Gauss lov.

a)

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^\infty \mathrm{d}q = \int_0^\infty \rho(r)\cdot \mathrm{d}\tau = \int_0^R 2\rho_0 \left(\frac{R}{r} - 1\right)\cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r \\ &= 8\pi\rho_0 \int_0^R \left(rR - r^2\right)\mathrm{d}r = 8\pi\rho_0\left(\frac{1}{2}R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) = \underline{\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0}\,. \end{aligned}$$

Merk at ρ_0 dermed blir gjennomsnittlig ladningstetthet i kula.

b) Bruker Gauss' lov $\Phi_E = Q_{\mathrm{encl}}/\epsilon_0$ og velger Gaussflate = kuleflate med radius r. For $r > R$ er $Q_{\mathrm{encl}} = Q = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_0$ (totalladning, fra a). For $r < R$ må vi integrere som over, men nå med grenser $\int_0^r$, som gir

$$Q_{\mathrm{encl}}(r) = 8\pi\rho_0 \int_0^r \left(rR - r^2\right)\mathrm{d}r = 8\pi\rho_0\left(\frac{1}{2}r^2 R - \frac{1}{3}r^3\right) = 8\pi\rho_0 r^3\left(\frac{1}{2}\frac{R}{r} - \frac{1}{3}\right).$$

Med kulesymmetri er $\vec{E}$ radielt retta utover og fluks ut av kuleoverflate med radius r er

$$\Phi_E = \oint \vec{E}(r)\cdot \mathrm{d}\vec{A} = E(r)4\pi r^2.$$

Gauss' lov $\Phi_E = Q_{\text{encl}}/\epsilon_0$ gir

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{8\pi\rho_0 r^3\left(\frac{1}{2}\frac{R}{r} - \frac{1}{3}\right)}{4\pi r^2\,\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{r}} = \underline{\dfrac{\rho_0 R}{\epsilon_0}\left(1 - \dfrac{2}{3}\dfrac{r}{R}\right)\hat{\mathbf{r}}} & \text{når } r < R \\ \dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0}{4\pi\epsilon_0\,r^2}\,\hat{\mathbf{r}} = \underline{\dfrac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0\,r^2}}\,\hat{\mathbf{r}}\,. & \text{når } r \geq R \end{cases}$$

Når det spørres etter vektorstørrelse $\vec{E}$ skal retningsvektor $\hat{\mathbf{r}}$ være med. Ellers noen kontroller:

\# Kontinuitet av E ved $r = R$: $\quad \vec{E}(r \to R^-) = \dfrac{\rho_0 R}{\epsilon_0}\left(1 - \dfrac{2}{3}\right)\hat{\mathbf{r}} = \dfrac{\rho_0 R}{3\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{r}} = \vec{E}(r \to R^+)$.

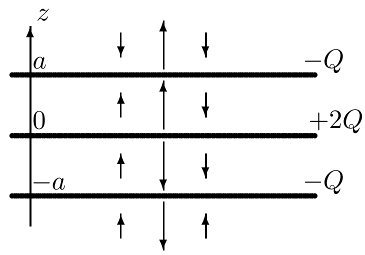
\# Utenfor kula blir feltet som punktladning $Q = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_0$ i sentrum.

\# $Q_{\text{encl}}(r \to R^-) = 8\pi\rho_0 R^3\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{4}{3}\pi R^3\rho_0 = Q_{\text{encl}}(r \to R^+)$ likt for begge uttrykk.

Noen hadde under eksamen lest $R/r - 1$ som $R/(r-1)$, som jo er feiltolkning av matematisk notasjon og uoverensstemmelse med enheter.

Oppgave 3. Kapasitans og potensial.

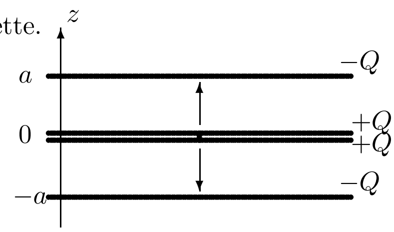
a) Feltene $E_- = \sigma/(2\epsilon_0) = -Q/(2A\epsilon_0)$ for øverste og nederste plate og $E_+ = 2Q/(2A\epsilon_0)$ for midterste plate er representert med vektorer i figuren til høyre (dobbelt så sterkt felt fra midterste plate). Legger vi sammen E fra de tre planene, finner vi at det totale feltet er



$$E(z) = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0 A} & \text{for} \quad z \in [0, a\rangle \\ -\frac{Q}{\epsilon_0 A} & \text{for} \quad z \in \langle -a, 0] \\ 0 & \text{for} \quad z \notin [-a, a] \end{cases}.$$

Vi kan også bruke Gauss' lov på ulike sylindre med ulike høyder for å vise dette.

Ladningen på midterste plate vil legge seg med $+Q$ på hver side. Det betyr at platene kan betraktes som to seriekoplede kondensatorer med ladning $Q + Q$ på midtplatene (i motsetning til $Q - Q$ som vanlig for seriekoplede kondensatorer), vist til høyre. Da er det veldig enkelt å se at feltet blir som vist i likningen over.



b) Vi bruker i det følgende $E_0 = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$. Potensialet endres $+E_0 a$ fra nederste til midtre plate, og endres $-E_0 a$ fra midtre til øverste plate. Følgelig er

$$\underline{V(0) = E_0 a = \frac{Qa}{\epsilon_0 A} \quad \text{og} \quad V(a) = 0\,.}$$

Alternativt mer sirlig med integral:

$$\begin{aligned} V(0) &= -\int_{-a}^{0} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_{-a}^{0} (-E_0\,\hat{\mathbf{k}})\cdot \mathrm{d}z\,\hat{\mathbf{k}} = E_0(0 - (-a)) = E_0 a \\ V(a) &= [V(a) - V(0)] + V(0) = -\int_0^a E_0\,\hat{\mathbf{k}}\cdot \mathrm{d}z\,\hat{\mathbf{k}} + E_0 a = -E_0 a + E_0 a = 0. \end{aligned}$$

c) Med samme ladning på platene og permittiviteten økt med faktor 10, er den elektriske feltstyrken redusert med en faktor 10 i volumet mellom midtre og øverste plate, sammenlignet med før vi satte inn den dielektriske skiva. Følgelig avtar potensialet med $\frac{1}{10}E_0\,a$ når vi går fra midtre til øverste plate. Potensialforskjellen mellom midtre og nederste plate er uendra, slik at $V(0) = E_0 a$ er uendra, og potensialet på øverste plate kan uttrykkes

$$V(a) = [V(a) - V(0)] + V(0) = -\frac{E_0}{10}\,a + E_0\,a = \underline{\frac{9}{10}E_0\,a = \frac{9Qa}{10\epsilon_0 A}}\,,$$

Alternativt med integraler

$$V(a) = [V(a) - V(0)] + V(0) = -\int_0^a \frac{E_0}{10}\cdot \mathrm{d}z + E_0 a = -\frac{E_0}{10}\,a + E_0\,a = \frac{9}{10}E_0\,a.$$

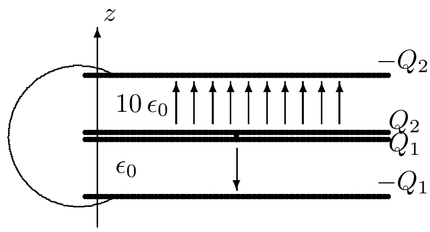
d) Med elektrisk kontakt mellom øverste og nederste plate må potensialet være den samme på platene. Dette innebærer at vi må ha samme elektriske feltstyrke i øvre halvdel (der vi har dielektrikum) som i nedre halvdel (der vi har luft/vakuum), men med motsatt retning. Dette oppnås ved at ladning strømmer mellom øvre og nedre plate. Med indeks 1 for nedre og 2 for øvre halvdel av rommene og bare regnet med absoluttverdier, får vi

$$E_2 = E_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{D_2}{10\epsilon_0} = \frac{D_1}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_2/A}{10\epsilon_0} = \frac{Q_1/A}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad Q_2 = 10Q_1 \,.$$

Dessuten må vi selvsagt ha $Q_1 + Q_2 = 2Q$. Løser vi disse to ligningene med hensyn på de to ukjente ladningene, finner vi

$$\underline{Q_1 = \frac{2}{11}Q \quad \text{og} \quad Q_2 = \frac{20}{11}Q} \,.$$

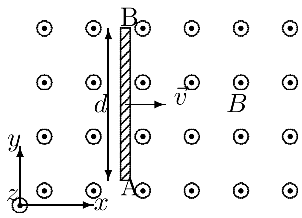
Som angitt i oppgaveteksten er ladningen negativ på hver plate, $-Q_1$ på nederste og $-Q_2$ på øverste.



Alternativt kan vi også her, som i a), betrakte platene som to seriekoplede kondensatorer. Nå med ladning $Q_1 + Q_2$ på midtplatene, vist til høyre. Da potensialforskjellen er lik over begge kondensatorerene, må den øvre kondensator med 10x kapasitans ($C = \epsilon_r \epsilon_0 A/d$) ha 10x så stor ladning. Og summen $Q_2 + Q_1 = 2Q$.

Oppgave 4. Induksjon.

a) Metallstanga er el. nøytral men har frie ladninger som kan bevege seg. La oss først anta ladningene er positive, q. Hver ladning vil påvirkes av en Lorentzkraft $F_B = q|\vec{v} \times \vec{B}| = qvB$ i negativ y-retning etter høyrehåndsregelen. Ladninger vil flytte seg mot A og gi et positivt potensial $\mathcal{E}$ der. Dette vil gi et elektrisk felt $E = \mathcal{E}/d$ i stanga og en elektrisk kraft i positiv y-retning. Ved likevekt vil magnetisk og elektrisk kraft akkurat oppheve hverandre (som ved Hall-effekten):



$$F_B = F_E \qquad \Rightarrow \qquad qvB = qE = q\mathcal{E}/d \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\mathcal{E} = Bvd = 1,50\,\mathrm{T} \cdot 2,00\,\mathrm{m/s} \cdot 0,20\,\mathrm{m} = 0,60\,\mathrm{V}}.$$

Med positiv ladning blir nedre ende A positiv. Med negativ ladning vil Lorentzkrafta føre de negative ladningene i positiv y-retning og også da blir enden A positiv. Enhetsanalyse: $\mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Am}}\mathrm{m}^2/\mathrm{s} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{As}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = \mathrm{V}$.

Alternativ beregning fra Faradays lov ved å betrakte staven som del av en lukket rektangulær krets til venstre for staven og med areal $A(t) = d \cdot x = d \cdot vt$. Med Φ_B lik magnetisk fluks innenfor den lukkede strømsløyfa er ems'en gitt ved

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial [B \cdot A(t)]}{\partial t} = -B \cdot d \cdot v, \quad \text{som over.}$$

Iølge Lenz' lov vil det induseres strøm i klokkeretning for å nøytralisere økningen av magnetisk fluks oppover. Når staven er kilden for den tenkte strømsløyfa, må da A være positiv.

b) En ladning q i metallstaven i avstand r fra rotasjonsaksen har hastighet $v = \omega r = 2\pi f \cdot r$. Magnetfeltet er normalt på bevegelsen og ladningen blir påvirket av en kraft $F = q\vec{v} \times \vec{B}$ som har retning langs staven ut fra sentrum mot B med rotasjon mot klokka. Denne krafta gir en forskyvning av ladninger som skaper et elektrisk felt. Vi får som i a) balanse mellom elektrisk og magnetisk kraft:

$$F_B = F_E \qquad \Rightarrow \qquad qvB = qE \qquad \Rightarrow \qquad E = vB.$$

Til forskjell fra a) vil v og dermed E endres langs staven, må derfor integrere. Potensialforskjellen over en infinitesimal lengde $\mathrm{d}r$ blir $\mathrm{d}\mathcal{E} = E\mathrm{d}r$ og potensialforskjellen mellom $r = 0$ og $r = d$ blir

$$\mathcal{E} = \int_0^d E\mathrm{d}r = \int_0^d vB\mathrm{d}r = \omega B \int_0^d r\mathrm{d}r = \omega B \frac{1}{2} d^2 = 2\pi \cdot 5,0\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 1,5\,\mathrm{T} \cdot \frac{1}{2}(0,20\,\mathrm{m})^2 = \underline{0,94\,\mathrm{V}}\,.$$

Alternativ beregning med tenkt lukka strømsløyfe og Faradays lov: $|\mathcal{E}| = \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{B\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$. I en hel omdreining sveipes over et areal $\mathrm{d}A = \pi d^2$, og dette tar tida $\mathrm{d}t = T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$. Dette gir

$$|\mathcal{E}| = B \cdot \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = B \cdot \pi d^2 \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \underline{\omega B \frac{1}{2} d^2}\,, \quad \text{som over.}$$

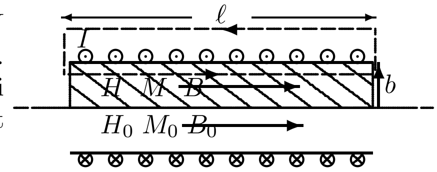
For å sammenlikne med a) kan vi sette inn massesenterhastigheten $v_{\mathrm{CM}} = \omega \frac{1}{2} d$ og få $\mathcal{E} = B \cdot \omega \frac{1}{2} d \cdot d = B\, v_{\mathrm{CM}}\, d$. Altså samme uttrykk som i a) med stavhastighet lik halvparten av ytterpunktets B's hastighet!

Oppgave 5. Magnetisk materiale.

a) $\vec{M} = \sum \vec{\mu}/\tau$ der $\sum \vec{\mu}$ er total (netto) magnetisk dipolmoment knyttet til hvert atom og τ er volumet til materialet. Eksperimentelt kan man finne $M = \chi_\mathrm{m}\vec{H}$ der $\chi_\mathrm{m} = \mu_\mathrm{r} - 1$ er magnetisk susceptibilitet for materialet og $\vec{H}$ er magnetisk feltstyrke inne i materialet, men χ_m er sterkt avhengig av H, forhistorie og temperatur.

$$M_\mathrm{s} = \frac{\sum \vec{\mu}}{\tau} = \frac{\mu_\mathrm{a} \cdot N_\mathrm{a}}{\tau} = \mu_\mathrm{a} \cdot n_\mathrm{a} = 9,3 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{Am}^2 \cdot 1,68 \cdot 10^{29}\,\mathrm{m}^{-3} = \underline{1,56 \cdot 10^6\,\mathrm{A/m}.}$$

b) Figuren viser et sidesnitt av solenoiden med jernkjernen. Strømmen I genererer feltstyrken H uavhengig av materialet inni solenoiden ($H = H_0$). Legger en Amperekurve som et rektangel med en sidekant (lengde ℓ) inni solenoiden og resten utenfor. Utenfor solenoiden tilnærmes $H = 0$ slik at $\oint \vec{H} \mathrm{d}\vec{s}$ gir bidrag bare inni solenoiden:



$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = I \quad \Rightarrow \quad H\,\ell + 0 + 0 + 0 = I\,N \quad \Rightarrow \quad \underline{H = H_0} = I\,N/\ell = I\,n = 800\,\mathrm{m}^{-1} \cdot 3,50\,\mathrm{A} = \underline{2,80\,\mathrm{kA/m}}\,,$$

der N er antall viklinger over solenoidens lengde ℓ.
Alle feltstørrelser peker mot høyre i solenoidens akseretning (høyrehåndsregel, fingre rundt solenoiden i strømretning og tommelen er vektorretningen). Vist med piler i figuren.
Merk at tangentkomponenten til $\vec{H}$ er alltid kontinuerlig over ei grenseflate.

c) Beregning av magnetiseringen fra den lineære relasjonen $M = \chi_\mathrm{m} H$ gir

$$\begin{aligned} M_0 &= (\mu_\mathrm{r} - 1)H = (1-1) \cdot H_0 = \underline{0\,\mathrm{A/m}}, \\ M &= (\mu_\mathrm{r} - 1)H = (2000 - 1) \cdot H_0 = 5,60 \cdot 10^6\,\mathrm{A/m}. \end{aligned}$$

Men denne verdien for M er ikke mulig, da metning M_s inntrer ved en lavere verdi som funnet i pkt. a). Magnetiseringen vil derfor bli

$$\underline{M = M_\mathrm{s} = 1,56 \cdot 10^6\,\mathrm{A/m}.}$$

Verdier for magnetisk flukstetthet fra $B = \mu_0(H + M)$:

$$\begin{aligned} B_0 &= \mu_0(H_0 + 0) = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A} \cdot 2800\,\mathrm{A/m} = \underline{3,52\,\mathrm{mT}}, \\ B &= \mu_0(H + M_\mathrm{s}) = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A} \cdot (2,80 + 1560) \cdot 10^3\,\mathrm{A/m} = \underline{1,96\,\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Verdi for B hvis vi bruker oppgitt permeabilitet blindt og ikke bruker begrensing i metningsmagnetisering:
$B' = \mu_\mathrm{r} \cdot \mu_0 H = 2000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A} \cdot 2800\,\mathrm{A/m} = 7,04\,\mathrm{T}$. Dette svaret er altså ikke riktig.

Oppgave 6. Vekselstrømskrets.

Spenning og strøm på kompleks form uttrykkes

$$V(t) = V_0 \cdot e^{i\omega t} \quad \text{og} \quad I(t) = I_0 \cdot e^{i\omega t}$$

der V_0 og I_0 er komplekse amplityder hvor vi kan velge den ene reell. Ved valg av V_0 reell er $V(t)$ null når $t = 0$.

Kompleks impedans for en spole er $Z_L(\omega) = i\omega L$ og kompleks impedans for en kondensator er $Z_C(\omega) = 1/i\omega C$. Disse kan memoreres (best!), utledes eller finnes fra Angell og Lian: Størrelser og enheter. Dette gir impedansen for parallellkretsen:

$$Z(\omega) = Z_L // Z_C = \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{i\omega L \cdot 1/i\omega C}{i\omega L + 1/i\omega C} = \underline{\frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC}}.$$

Ohms lov $V(t) = Z(\omega) \cdot I(t)$ gir kompleks strømamplityde

$$I_0 = \frac{V_0}{Z(\omega)} = V_0 \cdot \frac{1 - \omega^2 LC}{i\omega L} = V_0 \cdot i \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L}.$$

(Eller fra: $I(t) = I_C(t) + I_L(t) = V(t)/Z_C + V(t)/Z_L = V(t) \cdot (i\omega C + 1/i\omega L)$).

Reell strømamplityde

$$|I_0| = \left| V_0 \cdot \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L} \right| = \underline{|V_0| \cdot \frac{\left|\omega^2 LC - 1\right|}{\omega L}}. = \underline{|V_0| \cdot \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right|}.$$

Absoluttverditegnet må med, amplityden er positiv mens fortegnet inngår i fasevinkelen (som ikke er spørsmål om her).

$\mathcal{A.M}$i. 3. juni 12.