

## VANNBØLGER

**Mål:** Hensikten med oppgaven er å gjøre seg kjent med begrepene frekvens, bølgelengde og fasehastighet til bølger. Dessuten er hensikten å gjøre seg kjent med begrepene dispersjon og gruppehastighet, og hvordan gruppehastigheten kan måles og avledes fra dispersjonsrelasjonen. En skal måle fase- og gruppehastighet for vannbølger i to ulike frekvensintervall ved bruk av to forskjellige teknikker.

### Oppgaver

Her følger en kort oppsummering av oppgavene som skal gjøres i denne laboratorieøvelsen:

#### 1 Harmoniske vannbølger i et lite vannkar

- Mål bølgelengden ( $\lambda$ ) som funksjon av frekvensen ( $f$ ) ved hjelp av stroboskopiske teknikker.
- Beregn fasehastigheten ( $c$ ) og framstill denne som funksjon av bølgetallet ( $k$ ).
- Finn fra målingene i forrige punkt hva gruppehastigheten ( $u$ ) til vannbølger vil bli som funksjon av bølgetallet ( $k$ ).
- Beregn og framstill kvadratet av målte vinkelfrekvenser (sirkelfrekvenser) ( $\omega^2$ ) som funksjon av bølgetallet ( $k$ ).
- Bestem, ved sammenlikning av det teoretiske uttrykket for  $\omega^2$  (dispersjonsrelasjonen) med målte resultater, vannets overflatespenning og kommenter resultatene.

#### 2 Bølgepakker i bølgerennen

- Mål bølgelengden ( $\lambda$ ) som funksjon av frekvensen ( $f$ ) ved bruk av Matlab, NI-DAQ og sensor for vannets ledningsevne.
- Beregn fasehastigheten ( $c$ ) og framstill denne som funksjon av bølgetallet ( $k$ ) i dette frekvensområdet.
- Lag en bølgegruppe og mål gruppehastighet.
- Bruk dispersjonsrelasjonen til å finne fase- og gruppehastighet som funksjon bølgelengde og sammenlikne målt med beregnet fasehastighet.

## 1 Teori

### 1.1 Teoretiske relasjoner for vannbølger

Fasehastigheten ( $c$ ) til en harmonisk bølge er farten til en bølgetopp og den er bestemt av relasjonen (se senere utledning):

$$c = \frac{\omega}{k} = f \cdot \lambda, \quad (1)$$

der  $\omega = 2\pi f$  er vinkelfrekvensen og  $f$  er frekvensen,  $\lambda$  er bølgelengden og  $k = 2\pi/\lambda$  er bølgetallet, som er antallet bølgetopper på en strekning  $2\pi$ . I oppgaven bestemmes frekvens og bølgelengde ved måling og dermed kan fasehastigheten bestemmes.

Ofte er bølger avgrenset til ett område på overflata og kalles da en gruppebølge; dette navnet fordi den kan tenkes framkommet som en sum av flere harmoniske bølger. Midtpunktet av bølgen vil bevege seg med en gruppehastighet ( $u$ ), som er bestemt av følgende relasjon

$$u = \frac{d\omega}{dk} \approx \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}, \quad (2)$$

altså den deriverte av vinkelfrekvensen med hensyn på bølgetallet  $k$ . Den deriverte kan beregnes som en differens mellom målte naboverdier av vinkelfrekvens og bølgetall.

Tyngdekraften ( $G$ ) og overflatespenningen ( $\sigma$ ) virker på en krummet vannoverflate for å få den tilbake til likevekt. Dessuten, siden vann tilnærmet er en inkompressibel væske, vil vannmengder i bevegelse forskyves til naboområder. Vannmolekyler vil derfor bevege seg i både vertikal- og horisontalretningen. Dersom bølgelengden er liten i forhold til dybden av karet (dette kalles dypvannsbølger), vil ett vannmolekyl følge en sirkulær bevegelse ved overflaten. Når en utleder bølgelikningen for vannbølger, vil en få en relasjon mellom  $\omega$  og  $k$ , og denne kalles dispersjonsrelasjonen. For dypvannsbølge ser den slik ut:

$$\omega^2 = g \cdot k + \frac{\sigma}{\rho} \cdot k^3. \quad (3)$$

Den forteller hvordan vinkelfrekvensen til bølgebevegelsen er bestemt av parametrene for mediet og bølgetallet  $k$ . Disse parametrene er vannets tetthet,  $\rho = 1,0 \text{ g/cm}^3$ , og overflatespenningen  $\sigma$ , som for rent vann er  $\sigma = 72 \text{ g/s}^2 = 0,072 \text{ N/m}$  og tyngdens akselerasjon som er  $g = 9,82 \text{ m/s}^2$ . Fra dette uttrykket kan henholdsvis fasehastigheten og gruppehastigheten beregnes som funksjon av bølgetallet (eller bølgelengden):

$$c = \frac{\omega}{k} \quad u = \frac{d\omega}{dk}. \quad (4)$$

For  $\lambda = 1,7 \text{ cm}$  blir de to bidragene i uttrykket for  $\omega^2$  like store og fasehastigheten like stor som gruppehastigheten. For  $\lambda > 1,7 \text{ cm}$  dominerer tyngden ( $gk$ -leddet) og gruppehastigheten blir halvparten av fasehastigheten, mens for  $\lambda < 1,7 \text{ cm}$  dominerer overflatespenningen og gruppehastigheten er  $3/2$  av fasehastigheten. Vis dette ved derivasjon av uttrykket over.

Om en tar hensyn til at vannkaret har endelig dybde (vanndybden er  $h$ ), ser dispersjonsrelasjonen slik ut:

$$\omega^2 = \left( g \cdot k + \frac{\sigma}{\rho} \cdot k^3 \right) \cdot \frac{1 - \exp(-2kh)}{1 + \exp(-2kh)}. \quad (5)$$

Dersom en innretter seg slik at produktet  $2kh > 1$ , kan eksponentialleddene neglisjeres, og for lange dypvannsbølger sitter en tilbake med

$$\omega^2 = g \cdot k + \frac{\sigma}{\rho} \cdot k^3. \quad (6)$$

## 1.2 Matematisk beskrivelse av harmoniske bølger

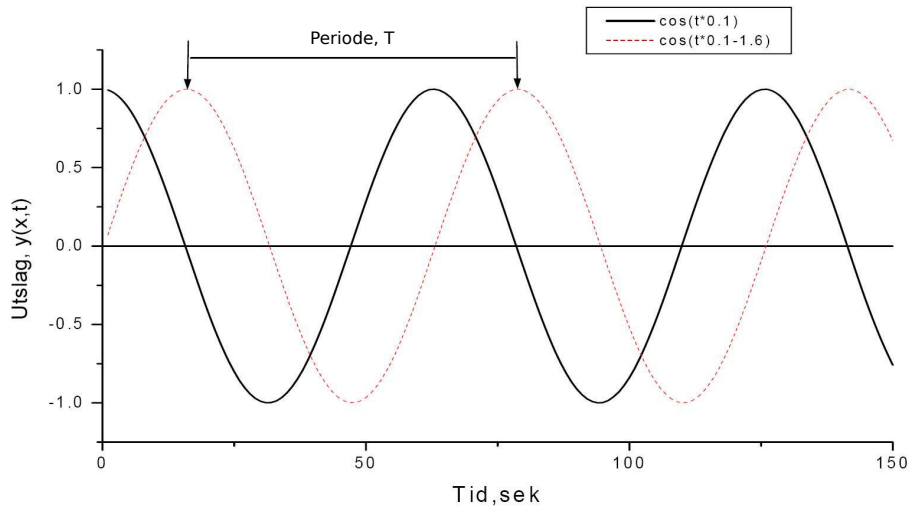
*Begrepene bølgelengde og bølgetall, frekvens og vinkelfrekvens vil bli introdusert og diskutert. Dessuten vil uttrykket for fasehastigheten bli utledet.*

Harmoniske bølger beskrives ved likningen:

$$y(x, t) = y_0 \cdot \cos(kx - \omega t) = \text{Re}\{y_0 \cdot \exp(i(kx - \omega t))\} \quad (7)$$

der  $y(x, t)$  er bølgeutslaget på stedet  $x$  ved tidspunktet  $t$ , og  $y_0$  er maksimalutslaget til bølgen. Parametere  $k$  kalles bølgetallet og forteller oss, som vi snart skal se, antallet topper til bølgen over en strekning på  $2\pi$ . Parameteren  $\omega$  kalles vinkelfrekvensen, og betyr antallet ganger bølgeutslaget har en bestemt verdi (for eksempel maksimalverdi) i tidsrommet  $2\pi$  sekunder. Re er forkortelse for realdelen til ett komplekst tall. Ved beregninger brukes ofte komplekse tall, fordi regnereglene er da oftest enklere enn for reelle tall. Etter utregningen kan trekke ut realdelen av det komplekse tallet.

Bølgelengden  $\lambda$  er lik avstanden mellom to bølgetopper, eller avstanden mellom to punkter  $x_1$  og  $x_2$  på



Figur 1: Bølge.

$x$ -aksen, slik at stigende bølgeutslag på disse stedene er like store:

$$y(x_1, t) = y(x_2, t) \quad (8)$$

$$y_0 \cdot \cos(kx_1 - \omega t) = y_0 \cdot \cos(kx_2 - \omega t), \quad (9)$$

som vil være tilfellet når:

$$kx_2 = kx_1 + 2\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda \equiv x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{k}. \quad (10)$$

Er avstanden mellom to bølgetopper  $\lambda$ , blir størrelsen:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (11)$$

nettopp antallet bølgetopper over strekningen  $2\pi$ , som nevnt over.

Sett at vi befinner oss på ett sted i bølgen (ved  $x = x_0$ ) ved tiden  $t_1$ , og spør etter tidspunktet  $t_2$  som er slik at bølgeutslaget er like stort som ved tiden  $t_1$ . Forskjellen mellom tidspunktene kalles periodetiden  $T$  (eller svingetiden,  $T = t_2 - t_1$ ), som igjen er knyttet til parametrene i bølgefunksjonene.

Forbindelsen mellom svingetiden  $T$  og vinkelfrekvensen kan en finne slik:

$$y(x_0, t_1) = y(x_0, t_2) \quad (12)$$

$$y_0 \cdot \cos(kx_0 - \omega t_1) = y_0 \cdot \cos(kx_0 - \omega t_2) \quad (13)$$

som gir at:

$$-\omega t_1 = -\omega t_2 + 2\pi \quad \Rightarrow \quad t_2 - t_1 = T = 2\pi/\omega. \quad (14)$$

Antallet ganger bølgen svinger opp og ned på ett sted i tidsenheten kalles frekvensen ( $f$  eller  $\nu$ ), og denne blir da:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi \cdot f. \quad (15)$$

For en harmonisk bølge er det gjerne parametrene  $\lambda$  og  $f$  som måles. Er  $\omega$  og  $k$  (eller  $f$  og  $\lambda$ ) for en harmonisk bølge kjent, kjenner en også fasehastigheten  $c$ , som er den farten som en bølgetopp beveger seg med. For at en hele tiden skal befinne seg på toppen av en bølge, eller at utsalget skal være konstant, må argumentet i cosinusfunksjonen være null, det vil si:

$$kx_m - \omega t = 0, \quad (16)$$

der  $x_m$  er den  $x$ -verdien som gir maksimalutslag (bølgetopp). Deriveres dette uttrykket fs:

$$\frac{dx_m}{dt} = \frac{\omega}{k}, \quad (17)$$

som er fasehastigheten:

$$c \equiv \frac{dx_m}{dt} \quad (18)$$

En ser at fasehastigheten  $c$  er lik forholdet mellom  $\omega$  og  $k$ . Settes uttrykkene for  $\omega$  og  $k$  inn, får en også:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T}. \quad (19)$$

Fasehastigheten er altså produktet av frekvens og bølgelengde.

### 1.3 Teori for bølgepakker

*Oppførsel og utseende til en ofte forekommende bølgepakke vil bli utledet. Farten som pakken beveger seg med vil bli beregnet (gruppeshastigheten). Uskarphetsrelasjon, en egenskap med bølger, vil bli utledet.*

Rent harmoniske bølger opptrer sjeldent. Virkelige bølger har en begrenset utstrekning og kalles ofte bølgepakker. Enhver pakke kan betraktes som en sum (superposisjon) av rent harmoniske bølger:

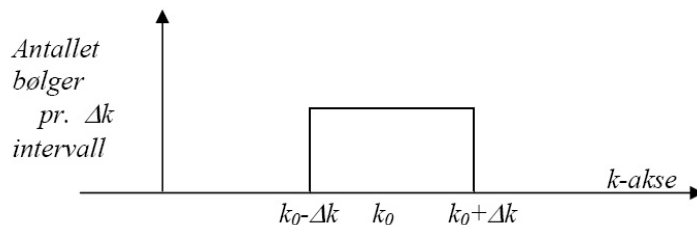
$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{i=n} y_0(k_i) \cdot \cos(k_i x - \omega_i t). \quad (20)$$

Maksimalutslagene,  $y_0(k_i)$ , til de enkelte harmoniske bølgene som inngår i summen kan være forskjellig for de ulike bølgetallene, slik at disse må ses på som en funksjon av  $k_i$ , bølgetallet for  $i$ -te harmoniske komponenten i summen.

La oss regne ut hvorledes fasongen på den sammensatte bølgen blir for det spesielle tilfellet når alle maksimalutslagene i summen er like store ( $y_0$ ) for alle  $k_i$ . Videre antar en at bølgetallene  $k_i$  fordeler seg jevnt i intervallet fra  $\langle k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k \rangle$ , der  $k_0$  er midtpunktet i intervallet. Bredden av intervallet blir  $2\Delta k$ , og kalles bølgetallsbredden. Antallet bølger  $dn$  i intervallet  $dk$  antas å være konstant og settes lik  $n_0$ :

$$n_0 = \frac{dn}{dk} = \frac{N}{2 \cdot \Delta k}, \quad (21)$$

der  $N$  er det totale antallet bølger i hele intervallet. Vi tilnærmer summen med en integral, og substituerer



Figur 2: Fordeling av antall bølger langs bølgetallsaksen.

størrelsen  $k$ , som er integrasjonsvariabel, med størrelsen  $q$ :

$$q = k_0 - k. \quad (22)$$

Videre må vi regne med, i det generelle tilfellet, at vinkelfrekvensen  $\omega$  er en funksjon av bølgetallet  $k$  (dispersjonsrelasjonen). Vi foretar en rekkeutvikling av  $\omega$  rundt  $k_0$ , som er midtpunktet for  $k$ -tallene:

$$\omega = \omega(k) = \omega(k_0) + \frac{d\omega(k_0)}{dk} \cdot (k - k_0) + \dots = \omega_0 + u \cdot q + \dots \quad (23)$$

altså en Taylorutvikling, der:

$$u \equiv \frac{d\omega(k_0)}{dk} \quad (24)$$

kalles *gruppeshastigheten* til bølgen. årsaken til at dette navnet vil framgå av beregningen nedenfor.

Utregning av summen gir:

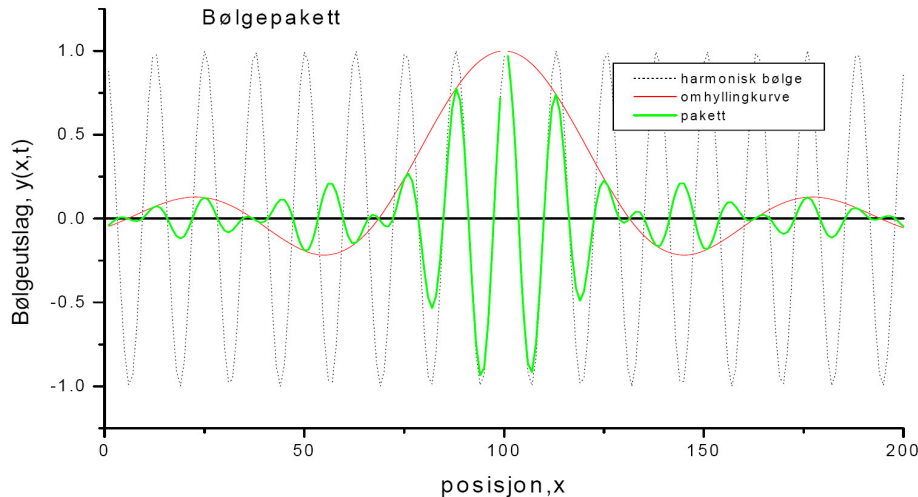
$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{i=n} y_0 \cdot \cos(k_i x - \omega t) = y_0 \cdot \int_{i=1}^{i=n} \cos(kx - \omega t) dn = y_0 \cdot \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \text{Re}(\exp(i(kx - \omega t))) \cdot \frac{N}{2\Delta k} \cdot dk \quad (25)$$

Ifølge reglene for regning med eksponenter får en videre:

$$\begin{aligned}
 y(x, t) &= y_0 \cdot n_0 \cdot \operatorname{Re}(\exp(i(k_0 x - \omega_0 t)) \cdot \int_{-\Delta k}^{\Delta k} \exp(i(qx - uqt)) \cdot dq \\
 &= N \cdot y_0 \cdot \cos(k_0 x - \omega_0 t) \cdot \frac{\sin((x - ut) \cdot \Delta k)}{(x - ut) \cdot \Delta k} = N \cdot y_0 \cdot \cos(k_0 x - \omega_0 t) \cdot \frac{\sin z}{z}
 \end{aligned} \tag{26}$$

der  $z = (x - u \cdot t) \cdot \Delta k$ .

Argumentet  $z$  avhenger både av sted og tid, slik at bølgene vil forplante seg langs  $x$ -aksen som en gruppe med farten  $u$ . bølgepakken er ett produkt av en harmonisk bølge,  $\cos(k_0 x - \omega_0 t)$ , som innhylles av funksjonen  $(\sin z)/z$ . Det er bevegelsen til omhyllingsfunksjonen en lettest ser, og denne beveger seg med gruppehastigheten  $u$ . Denne funksjonen er vist i Fig. 3.



Figur 3: En bølgepakke.

Kastes en stein i vannet, er det utbredelsen av pakken som det er lettest å observere, og følgelig er det gruppehastigheten en ser.

Uttrykket for omhyllingskurven viser også at det er en sammenheng mellom spredning i bølgetall,  $\Delta k$ , og utstrekningen av pakken. Det er naturlig å definere utstrekningen av bølgepakken,  $\Delta x$ , som den dobbelte  $x$ -verdi som gjør at denne funksjonen blir null. Velges for enkelhets skyld tidspunktet;  $t = 0$ , ser en at dette finner sted når:

$$\Delta x \cdot \Delta k = \pi \quad (\text{uskarphetsrelasjonen}). \tag{27}$$

Produktet av bølgetallsbredde,  $\Delta k$ , og utstrekning,  $\Delta x$ , er en konstant. Dette er en generell egenskap for bølger og vil følgelig gjelde for materiebølger. Jo mer veldefinert bølgetallet er, dess større utstrekning har pakken, og omvendt.

Dersom  $\Delta x$ , utstrekningen av bølgepakken, bestemmes, kan en bestemme spredningen i bølgetall:

$$\Delta k = \frac{\pi}{\Delta x}. \tag{28}$$

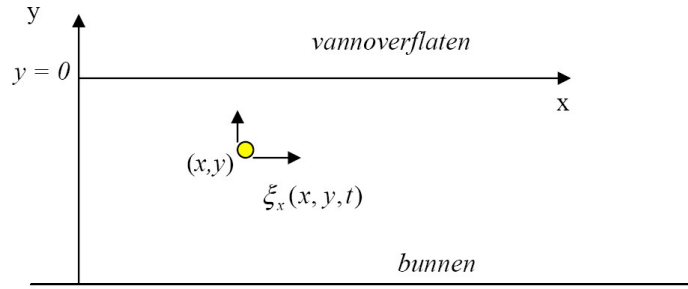
## 1.4 Kortfattet utledning av dispersjonsrelasjonen for vannbølger

*Hvordan vann beveger seg.*

Vi betrakter en vannpartikkel på stedet  $(x, y)$  når vannet er i likevekt; se Fig. 4. Når vannmassene forstyrres, blir den nye posisjonen til denne partikkelen  $(x, y)$  målt fra likevektsposisjonen, være en funksjon av både sted og tid:

$$\xi_x = \xi_x(x, y, t) \quad \xi_y = \xi_y(x, y, t). \tag{29}$$

I tilfellet av en harmoniske bølge, altså når overflaten beskrives av funksjonen  $\xi_y(x, 0, t) = \xi_0^y \cdot \sin(kx - \omega t)$ ,



Figur 4: Beskrivelse av en enkelt vannpartikkel.

der symbolene har den vanlige meningen, gjøres følgende antakelser om partikkelutslaget ved stedet  $(x, y)$ ; at det også varierer som en harmonisk funksjon av fasen:  $\varphi = kx - \omega t$ , og at det er en faseforskjell på  $\pi/2$  mellom horisontal- ( $x$ -komponenten)- og vertikalkomponenten ( $y$ -komponenten) til partikkelbevegelsen:

$$\xi_x(x, y, t) = \xi_0^x(y) \cdot \sin(kx - \omega t); \quad \xi_y(x, y, t) = \xi_0^y(y) \cdot \cos(kx - \omega t). \quad (30)$$

Herav følger at bevegelsen til vannpartikkelen blir en ellipse:

$$\left(\frac{\xi_x}{\xi_0^x}\right)^2 + \left(\frac{\xi_y}{\xi_0^y}\right)^2 = 1. \quad (31)$$

Av dette kan vi finne hastigheten til en vannpartikkel ved derivasjon av disse uttrykkene med hensyn på tiden:

$$v_x(x, y, t) = \frac{d\xi_x}{dt} = -\omega \cdot \xi_0^x(y) \cos(kx - \omega t) \quad v_y(x, y, t) = \frac{d\xi_y}{dt} = \omega \cdot \xi_0^y(y) \sin(kx - \omega t). \quad (32)$$

Så langt har vi satt opp en gjetning for hvordan vannpartiklene beveger seg; i det som følger skal vi vise at gjetningen, eller prøveløsningen, er riktig under visse betingelser, som er at vann er en *inkompressibel* væske og at vi ser bort fra *friksjon* når væskelag glir på hverandre.

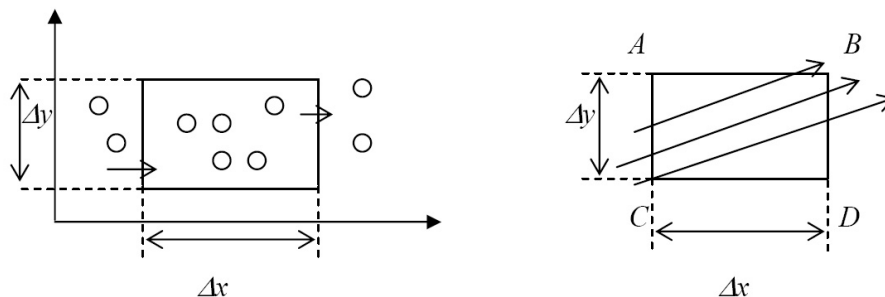
#### Imkompressibilitet

La oss betrakte en rektangulær boks med sidekanter  $\Delta x$  og  $\Delta y$  som ligger fast i vannet. Netto vannmengde som strømmer inn i boksen med sidekanter vinkelrett på  $x$ -retningen er produktet av tettheten ( $\rho$ ), arealet, som er  $\Delta x \Delta y$ , og hastighetsforskjellen mellom endene av boksen; som er:

$$\rho \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta v_x = \rho \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \Delta x, \quad (33)$$

og tilsvarende for  $y$ -retning:

$$\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot \Delta y. \quad (34)$$



Figur 5: Inkompressibilitet (venstre) og virvelfrihet (høyre).

Siden vannet er inkompressibelt, må summen av disse leddene være null; og da får vi:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (35)$$

Dette uttrykket kalles divergensen til hastigheten.

*Ingen virvler*

Denne betingelsen fører med seg at vannet ikke kan ha netto angulært moment (spinn, virvler). Viskositet kan føre til at krefter langs vannlag med ulik hastighet kan oppstå, og dermed virveldannelser. På den annen side, fravær av friksjon medfører fravær av virvler, som gjør at summen av hastighetsvektoren rundt en lukket sløyfe må være null; altså:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0. \quad (36)$$

Dette ser vi ved å addere hastigheter rundt rektangelet til høyre, se Fig. 5. Bidraget til linjeintegralet av hastigheten fra AB og CD er lengden  $\Delta x$  multiplisert med forskjellen i  $v_x$ -verdier,  $\Delta x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \Delta y$  og tilsvarende for bidragene fra de to andre sidekantene. En sier da at "curl" til hastigheten  $u$  er null.

#### Formen på ellipsene

Vi vil nå kombinere inkompressibilitet og fravær av virvler med hastighetsuttrykkene, som var:

$$v_x(x, y, t) = \frac{d\xi_x}{dt} = -\omega \cdot \xi_0^x(y) \cos(kx - \omega t) \quad (37)$$

$$v_y(x, y, t) = \frac{d\xi_y}{dt} = \omega \cdot \xi_0^y(y) \sin(kx - \omega t). \quad (38)$$

Når vi deriverer disse og setter dette inn i likningene avledet fra inkompressibilitet og virvelfrihet; fås:

$$\frac{d\xi_0^y}{dy} - k \cdot \xi_0^x = 0 \quad \frac{d\xi_0^x}{dy} - k \cdot \xi_0^y = 0 \quad (39)$$

(vi slutter å bruke partiell derivert, funksjonen vi søker avhenger bare av en variabel;  $y$ )

Ny derivasjon og innsetting gir:

$$\frac{d^2 \xi_0^y}{dy^2} - k^2 \cdot \xi_0^y = 0, \quad (40)$$

som har løsning:

$$\xi_0^y(y) = C_1 \cdot \exp(ky) + C_2 \cdot \exp(-ky), \quad (41)$$

hvor  $C_1$  og  $C_2$  er integrasjonskonstanter, bestemt av randbetingelser. I vårt tilfelle er den ene betingelsen at  $\xi_0^y(y=0) = \xi_0$ , som gir  $C_1 + C_2 = \xi_0$ . Den andre randbetingelsen er at ved bunnen ( $y = -h$ ) kan det ikke være noen hastighet i  $y$ -retning:

$$\xi_0^y(-h) = 0 = C_1 \cdot \exp(-kh) + C_2 \cdot \exp(kh) \quad (42)$$

som gir:

$$\xi_0^y(y) = \xi_0 \cdot \frac{\exp(k(h+y)) - \exp(-k(h+y))}{\exp(ky) - \exp(-ky)} = \xi_0 \cdot \frac{\sinh(k(h+y))}{\sinh(kh)} \quad (43)$$

og tilsvarende for  $x$ -komponenten:

$$\xi_0^x(y) = \xi_0 \cdot \frac{\cosh(k(h+y))}{\sinh(kh)}. \quad (44)$$

Fra disse uttrykkene kan vi finne formen til ellipsene. De blir mer og mer flate mot bunnen av karet.

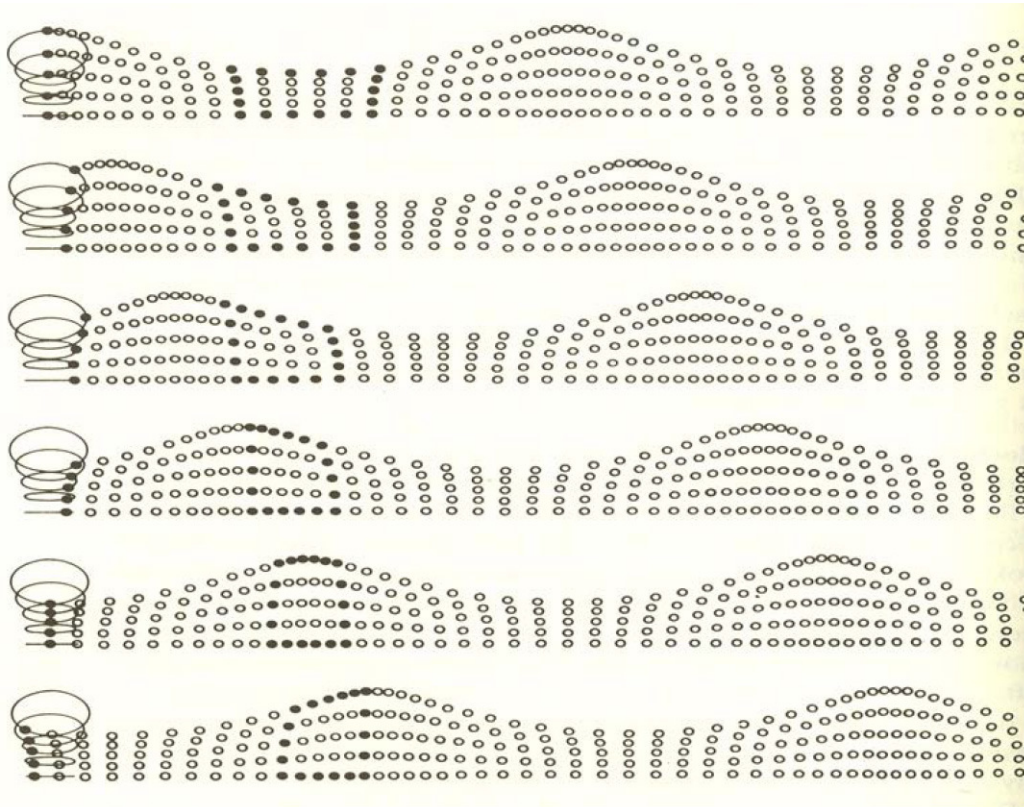
#### Dispersjonsrelasjonen

Dispersjonsrelasjonen er knyttet til bevegelseslikningen for systemet. For væsker brukes ofte Bernoullis likning, som forteller at energien til en avgrenset væskemengde er bevart, dersom systemet er stasjonært. Vi kan få vårt system stasjonært ved å følge bølgebevegelsen, det vil si vi innfører et koordinatsystem der origo beveger seg med fasehastigheten  $x' = x - \frac{\omega}{k} \cdot t$  i forhold til det opprinnelige systemet. I det stasjonære systemet blir hastighetskomponentene til vannpartiklene:

$$v_x(x', y) = \omega \cdot \xi_0^x(y) \cdot \cos(kx') - \frac{\omega}{k} \quad (45)$$

$$v_y(x', y) = \omega \cdot \xi_0^y(y) \cdot \sin(kx'). \quad (46)$$

I disse uttrykkene opptrer ikke tiden og da kan systemet oppfattes som stasjonært. Bernoullis setning sier at samlet mekanisk energi per enhetsmasse ( $E$ ) er lik overalt langs en strømlinje, som er banen som en vannpartikkel følger.



Figur 6: Bevegelser til vannpartikler. Figuren er hentet fra Main, IG. Vibrations and Waves in Physics. Cambridge University Press; 1993.

$$E = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \cdot v^2 + V, \quad (47)$$

der  $p$  er trykket,  $v$  er hastigheten og  $V$  den potensielle energien. Vi ser på en strømlinje som ligger på overflaten av vannet. Der er to bidrag til trykket; det ene skyldes lufttrykket  $p_a$ , og det andre skyldes overflatespenningen ( $\sigma$ ). Dette trykket er overflatespenningen dividert med krumningsradius ( $R$ ) til overflata, som er inversverdien til den dobbeltderiverte av funksjonen som beskriver overflata ( $\xi$ ):

$$p = p_a - \frac{\sigma}{R} = p_a - \sigma \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (48)$$

Når  $\xi = \xi_0 \cdot \cos(kx')$  blir  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k^2 \cdot \xi_0 \cdot \cos(kx')$  slik at trykket blir:

$$p = p_a + \sigma \cdot k^2 \cdot \xi_0 \cdot \cos(kx'). \quad (49)$$

Det andre leddet i Bernoullis likning blir:

$$v^2 = v_x^2(0, x') + v_y^2(0, x') = \omega^2 \cdot \xi_0^2 \cdot [\sin^2 kx' + \coth^2(kh) \cdot \cos^2(kx')] + \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 - 2\omega^2 \cdot \frac{\xi_0}{k} \cdot \coth(kh) \cdot \cos kx'. \quad (50)$$

Som vi for bølger med liten amplitude,  $k\xi_0 \ll 1$ , kan skrives som:

$$v^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 - 2\omega^2 \cdot \frac{\xi_0}{k} \cdot \coth(kh) \cdot \cos kx'. \quad (51)$$

Tilslutt, uttrykket for potensiell energi er:

$$V = g \cdot \xi = g \cdot \xi_0 \cdot \cos(kx'). \quad (52)$$

Når disse leddene summeres i uttrykket for  $E$ , finner en:

$$E = \frac{p_a}{\rho} + \frac{\sigma k^2}{\rho} \cdot \xi_0 \cdot \cos(kx') + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 - \frac{\omega^2 \xi_0}{k} \cdot \coth(kh) \cdot \cos(kx') + g\xi_0 \cdot \cos(kx'). \quad (53)$$

Ifølge Bernoullis likning skal dette være en konstant (ikke avhengig av  $x'$ ), som betyr at summen av



leddene foran må forsvinne, noe som tilsier at:

$$\frac{\sigma \cdot k^2}{\rho} - \frac{\omega^2}{k} \cdot \coth(kh) + g = 0 \quad (54)$$

eller:

$$\omega^2 = \left( gk + \frac{\sigma \cdot k^3}{\rho} \right) \tanh(kh), \quad (55)$$

som er dispersjonsrelasjonen for vannbølger. Det fremgår at fasehastigheten ( $c = \omega/k$ ) vil variere med  $k$  eller  $\omega$ . Det betyr at en bølge med en viss fasong på et senere tidspunkt vil ha en annen fasong, fordi når en løser opp bølgen i en sum av Fourierkomponenter, vil disse bevege seg med ulike fasehastigheter og dermed endre utseendet.

Derivasjonene over er basert på:

Main IG. Vibrations and Waves in Physics. Cambridge University Press; 1993.

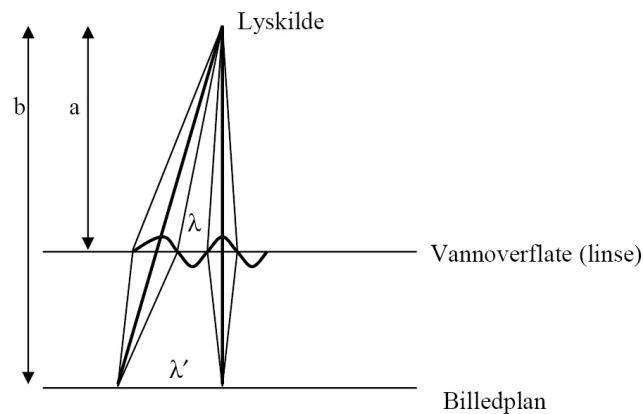
Alternativt, se:

<http://resonanceswavesandfields.blogspot.com/2008/04/water-waves-mathematical-derivation.html>

## 2 Framgangsmåte

### 2.1 Harmoniske vannbølger i et lite vannkar

I dette eksperimentet benyttes et lite vannkar til å måle vannbølgene. Dette baserer seg på at den krumme vannoverflaten, som oppstår som følge av bølgebevegelsen, fungerer som sylindrelinser. En punktformet lyskilde vil da avbildes som lyse striper på bordet, se Fig. 7. Ved å synkronisere lyskilden og duppen som lager bølgene, slik at de har samme frekvens, vil de lyse stripene på bordet oppfattes som stillestående.



Figur 7: Strålegangen fra lyskilde til billedplan. Den krumme vannoverflata vil bryte lyset.

Framgangsmåten til dette eksperimentet er:

- Slå på lampen og bølgegeneratoren.
- Mål avstanden mellom flere striper (dess flere dess bedre nøyaktighet, se appendiks I) og finn bølgelengden ( $\lambda$ ) som funksjon av frekvens ( $f$ ) ved å gjøre nødvendige tilleggsmålinger<sup>1</sup>. Bruk frekvenser fra ca 10 Hz - 60 Hz med 5 Hz intervaller.
- Beregn fasehastigheten ( $c$ ) som funksjon av bølgetallet ( $k$ ). Bruk en m-fil i Matlab til å beregne dette.

<sup>1</sup>Et hint for å finne ut hva disse ekstra målingene er, er å studere Fig. 7 for å finne relasjonen mellom avstanden mellom stripene og bølgelengden ( $\lambda$ ).

- Finn gruppehastigheten ( $u$ ) til bølgene som funksjon av bølgetallet ( $k$ ). Her er ligning 2 nyttig.
- Finn kvadratet av vinkelfrekvensen ( $\omega^2$ ) som funksjon av bølgetallet ( $k$ ). Bruk dette til å finne vannets overflatespenning ( $\sigma$ ) ved å benytte dispersjonsrelasjonen for dypvannsbølger (ligning 3).
- Fremstill to figurer (en for  $\omega^2$  og en for  $\sigma$ ) som funksjon av  $k$ .
- Bruk ligning 3 og verdiene for  $g$  og  $\sigma$  i den påfølgende teksten til å regne ut de teoretiske verdiene for  $\omega^2$  og fremstill denne i samme figur som den målte  $\omega^2$ , og sammenlign. Regn også ut verdiene for  $u$  og sammenlign disse med de målte verdiene. Kommenter resultatene.
- Mål dybde av vannet og finn bølgelengdene der dispersjonsrelasjonen forenkles til  $\omega^2 = g \cdot k + \frac{\sigma}{\rho} \cdot k^3$ .

## 2.2 Bølgepakker i bølgerennen

Oppsettet i bølgerenne består av to sensorer som registrer vannets ledningsevne. Disse sensorene er tilkoblet en forsterker og deretter en DAQ. For å lese ut dataene brukes programmet *acquire.m* i Matlab (se Appendiks II). Dette programmet er det samme som ble brukt i for lydbølger. For å se hvordan programmet virker kan man skrive *help acquire* Matlab.

Fasehastigheten er hastigheten som en bølgetopp beveger seg med, og den kan finnes direkte som  $c = \Delta x / \Delta t$ .

- Start bølgegeneratoren. Hastigheten til motoren kan varieres ved å stille spenning.
- *Acquire.m* brukes til å logge signalene med for eksempel en samplingsfrekvens på 500 Hz og samplingstid på 5 sekunder.
- Gjør målinger ved tre forskjellige frekvenser (spenninger)  $f_1 < f_2 < f_3$ .
- Bruk markøren i Matlab til å finne tidsforskjellen  $\Delta t$  mellom bølgetoppen og finn fasehastigheten.
- Sett sammen målingene fra bølgerennen og vannkaret til et sammenhengende datasett i Matlab.
- Beregn fasehastigheten ( $c$ ) som funksjon av bølgetallet ( $k$ ).

### Bølgepakke:

- Beregn gruppehastigheten ved  $f_2$ .
- Slå av bølgegeneratoren og deretter slå den på en kort tid for å generere en bølgepakke (ved å bruke spenningen fra  $f_2$ ).
- Finn gruppehastigheten ved å se på forflytningen av bølgepakken, det vil si tiden mellom detektorene.
- Sammenlign gruppehastigheten i forrige punkt med den forventede verdien (beregnet tidligere).

## Appendiks I - Eksempel på beregning av måleusikkerhet

Dette appendikset er lagt til for å vise hvordan forskjellige mellom hvordan måler påvirker usikkerheten i resultatet.

Eksempelen er at vi har  $N$  punkter som vi vet skal være plassert med en jevn avstand  $L$ . Denne avstanden skal vi finne, og det kan gjøres på minst to forskjellige måter

### Metode 1 - Forskjellen over hele intervallet

Vi måler avstanden mellom første ( $x_f$ ) og siste punkt ( $x_s$ ) og deler på  $N - 1$ ,

$$L_1 = \frac{x_s - x_f}{N - 1} \quad (56)$$

som har usikkerheten (gitt ved usikkerheten  $\Delta x$  for målingen av  $x_f$  og  $x_s$ )

$$\begin{aligned} \Delta L_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial L_1}{\partial x_f} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_s} \Delta x\right)^2} \\ &= \Delta x \sqrt{2 \left(\frac{1}{N - 1}\right)^2} \\ &= \frac{\Delta x \sqrt{2}}{N - 1} \end{aligned}$$

### Metode 2 - Middelet av de individuelle avstandene over intervallet

Vi måler avstanden mellom alle punktene og finner middelet.

$$L_2 = \frac{1}{N - 1} \sum_{n=1}^{N-1} d_n$$

hvor  $d_n = x_{n+1} - x_n$ . Usikkerheten for en enkelt avstand  $d$  er

$$\begin{aligned} \Delta d &= \sqrt{\left(\frac{\partial d_n}{\partial x_{n+1}} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial d_n}{\partial x_n} \Delta x\right)^2} \\ &= \Delta x \sqrt{2} \end{aligned}$$

Den totale usikkerheten blir da

$$\begin{aligned} \Delta L_2 &= \sqrt{\sum_{m=1}^{N-1} \left(\frac{\partial L_2}{\partial d_m} \Delta d\right)^2} \\ &= \Delta d \sqrt{\sum_{m=1}^{N-1} \left(\frac{1}{N - 1} \sum_{n=1}^{N-1} \delta_{nm}\right)^2} \\ &= \Delta x \sqrt{2} \sqrt{\sum_{m=1}^{N-1} \left(\frac{1}{N - 1}\right)^2} \\ &= \frac{\Delta x \sqrt{2}}{\sqrt{N - 1}} \end{aligned}$$

hvor  $\delta_{nm}$  er Diracs deltafunksjon.

## Oppsummering

Som vi ser gir metode 1 mindre usikkerhet en metode 2 med en faktor  $1/\sqrt{N-1}$ . En annen viktig observasjon er at metode 2 vil bli påvirket mye sterkere av systematiske feil, siden en slik feil vil forskyve alle målingene og dermed også resultatet. I metode 1 vil en systematisk feil bli redusert med  $1/(N-1)$  noe som ikke skjer i metode 2.

Metode 1 har også en ren tidsbesparelse i forhold til metode 2, noe som man som oftest er en fordel.

## Appendiks II - acquire.m

```
1 function acquire(lydlab,numChan,trigging,sampleFreq, duration,saveFolder)
2
3 % ACQUIRE er en funksjon for å ta opp data fra en DAQ. Programmet tar fire
4 % argumenter lab, numChan, trigging, sampleFreq og saveFolder.
5 % - lydlab: en string som bestemmer om det er lydbølgelab (true) eller
6 %       vannbølgelab (false)
7 % - numChan: antall kanaler som det skal måles på (1 eller 2)
8 % - trigging: om datainnsamlingen skal trigges (true eller false)
9 %       NB: true forutsetter at det er 2 kanaler som det tas opp på
10 % - sampleFreq: hvor ofte det skal måles i Hz (50000 eller 200)
11 % - duration: hvor lenge det skal måles i sekunder (0.02 eller 5)
12 % - saveFolder: hvor dataene skal lagres. Denne bør være tom, og
13 %       forskjellig mellom hver gang funksjonen kjøres
14 %
15 % Eksempel på bruk (for lydbølgelab)
16 %   acquire(true,2,true,50000,0.02,'D:\Documents and Settings\localuser\Desktop\Data1')
17 %
18 % Skrevet av Pål Ellingsen, v 07.09.2012
19 % delvis bassert på oppsett av Iver Bakken Sperstad
20
21 fortsett = true;
22
23 while fortsett % for å ta flere målinger på rad
24
25     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
26     try % Bruker try catch for å finne rett enhet
27         AI=analoginput('nidaq','Dev3');
28     catch exception
29         try
30             AI=analoginput('nidaq','Dev2');
31         catch exception2
32             AI=analoginput('nidaq','Dev1');
33         end
34     end
35     %identifiserer "device"(Et National Instrument datainnsamlingkort (DAQ))
36
37     set(AI,'InputType','Differential');
38     %spesifiserer at det skal måles differensielt (spenningen mellom to ledninger)
39
40     Chan=addchannel(AI,1:(numChan+trigging));
41     % Antall kanaler som logges pluss en eventuell trigger kanal
42
43     AI.Channel.InputRange=[-5 5];
44     %spesifiserer måleområdet; mellom -1.5 og 1.5 V
45
46     set(AI,'SampleRate',sampleFreq);
47     %setter samplingsrate
48
49     sampleFreq=get(AI,'Samplerate');
50     % henter ut hva det virkelige samplingsraten er
51     set(AI,'SamplesPerTrigger',duration*sampleFreq);
52     %maskiner avsetter plass til datastrengen
```

```

53
54     if triggering % setter opp triggering hvis det er ønsket
55
56         set(AI, 'TriggerChannel', Chan(3))
57         set(AI, 'TriggerType', 'software')
58         set(AI, 'TriggerCondition', 'Rising')
59         set(AI, 'TriggerConditionValue', 0.00)
60         start(AI); % starter opptak
61
62     else % manuell triggering
63         set(AI, 'TriggerType', 'Manual');
64         start(AI); % starter opptak
65         trigger(AI) % trigger opptak
66     end
67
68     data=getdata(AI);
69     %dette er datastrengen
70
71     delete(AI); % sletter
72     clear AI;
73
74     %%%%%%%%% Databehandling %%%%%%%%%%%%%%%
75
76     s1=data(:,1:numChan); % lager en vektor for hver del av dataen
77
78     n=length(data);
79     tid=n./sampleFreq;
80
81     %samplingstidspunktene bergnes
82
83     figure(1) % plotter den målte dataene
84     clf(1)
85     plot(tid,s1(:,1),'b')
86     if numChan >1
87         hold on;
88         plot(tid,s1(:,2),'r')
89         hold off;
90         legend('Channel 1','Channel 2');
91     xlabel('Tid (s)')
92     ylabel('Spenning (V)')
93     end
94
95     filename = ['\',datestr(now,'HH-MM-SS'), '_samp-',num2str(sampleFreq),...
96               '_dur-',strrep(num2str(duration),' ','-')];
97     % lager et filnavn (blir noe som 15.45_samp_50000_dur_0.02
98
99
100    if numChan ==1
101        y1=fft(s1(:,1));
102
103        % det gjøres en Fourieromvendning av signalet
104        n1=length(s1(:,1));
105
106        %finner lengden av datastrengen
107        abs1=y1(1:n1/2).*conj(y1(1:n1/2));
108
109        %regner ut absoluttverdien av den Fourieromvendte (halve lengden)
110        f1=(0:(n1/2-1))*(sampleFreq/n1);
111
112        %beregner tilhørende frekvenser
113
114        figure(2)
115        clf(2)
116        plot(f1,abs1)
117        xlabel('f (Hz)')
118        title('FFT')
119        %frekvensspekteret plottes
120    end

```

```

121
122     if lydlab && not(triggering) && numChan~=1 % for å lese inn posisjon av mikrofon
123         mic1 = input('Posisjon av mikrofon 1: ');
124         mic2 = input('Posisjon av mikrofon 2: ');
125         filename = [filename, '_mic1-',num2str(mic1),'_mic2-',num2str(mic2)];
126     % legger til x1 og x2 til filnavn
127     elseif not(lydlab) % For å lese inn spenning
128         V = input('Spenning: ');
129         filename = [filename, '_spenning-',num2str(V)];
130     end
131
132     clear Chan exception
133
134     save([saveFolder,filename,'.mat'])
135     % lagrer alle variablene i en mat fil
136
137     igjen = input('Ny måling med samme parametre? [y]','s');
138     if isempty(again) || isequal(again,'y')
139     else
140         fortsett = false;
141     end
142 end
143
144 end

```