

# Bestemmelse av skjærmodulen til stål

Rune Strandberg\*  
Institutt for fysikk, NTNU, N-7491 Trondheim, Norge

9. oktober 2007

## Sammendrag

Skjærmodulen til stål har blitt bestemt ved en statisk og en dynamisk metode. Ved bruk av den statiske metoden ble skjærmodulen bestemt til  $G_{\text{stat}} = 9,8 \cdot 10^{10} \pm 1,5 \cdot 10^{10} \text{N/m}^2$  mens den dynamiske metoden gav  $G_{\text{dyn}} = 8,1 \cdot 10^{10} \pm 0,8 \cdot 10^{10} \text{N/m}^2$ .

## Innledning

Et legeme som utsettes for en ytre kraft kan deformeres. I materialet vil det da oppstå indre spenninger som forsøker å motvirke deformasjonen. I elastiske materialer vil legemet returnere til sin opprinnelige form når kraften opphører. Skjærmodulen er et mål på et materiales evne til å motstå vinkeldeformasjon. Spenninger som oppstår ved vinkeldeformasjon av et legeme kalles skjærspenninger. I tillegg til skjærmodulen vil legemets geometri være avgjørende for hvor store spenninger som oppstår [1].

## Teori

Dersom et legeme utsettes for en vinkeldeformasjon som skyldes torsjon (vridning) vil indre spenninger gi opphav til et dreiemoment  $\tau$  som er motsatt rettet av vridningen og som kan uttrykkes ved

$$\tau = -D\theta, \quad (1)$$

der  $\theta$  er vridningsvinkelen og  $D$  er torsjonsstivheten. Torsjonsstivheten er en geometri- og materialavhengig konstant som forteller hvor stor motstand man vil møte dersom man forsøker å deformere legemet ved vridning. For en tynn tråd med lengde  $L$  og et sirkulært tverrsnitt  $d$  er torsjonsstivheten gitt ved

$$D = \frac{\pi G d^4}{32L}, \quad (2)$$

der  $G$  er skjærmodulen til trådmaterialet.

Om summen av alle kraftmomentene som virker på et torsjonssystem er lik null vil systemet bevege seg med konstant vinkelhastighet eller forbli i ro (være statisk), ekvivalent til Newtons lover for lineær bevegelse. Hvis derimot momentbalansen er ulikt null, vil det oppstå en vinkelakselasjon. Vinkelakselasjonen vil også være avhengig av massen til objektet som roterer, da i form av et treghetsmoment  $I$ . Dette kan utnyttes til å lage pendelbevegelser. Mens en klassisk pendel blir drevet av tyngdekraften, blir en torsjonspendel drevet av torsjonskrefter. I en enkel torsjonspendel spenner to tråder opp et, i denne sammenhengen, stivt legeme. Pendelen startes ved å gi det stive legemet en dreining, slik at trådene vrir, og så slippe legemet.

---

\*TFY4145 Mekanisk fysikk, laboratoriekurs, H2007

Siden det i torsjonspendelen er to tråder som vris vil torsjonskreftene nå gi opphav til et dreiemoment gitt ved

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = -D_{\text{tot}}\theta, \quad (3)$$

der  $\tau_1$  og  $\tau_2$  er bidragene fra de to trådene og  $D_{\text{tot}}$  er den totale torsjonssivheten til systemet gitt ved

$$D_{\text{tot}} = \frac{\pi G d^4}{32} \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right), \quad (4)$$

der  $L_1$  og  $L_2$  er lengdene av de to trådene. Ved å ta utgangspunkt i bevegelsesligningene for rotasjonsbevegelse kan man finne svingperioden  $T$  til pendelen. Denne er gitt ved [2]

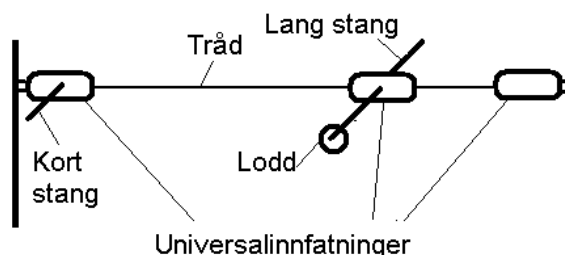
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D_{\text{tot}}}}, \quad (5)$$

der  $I$  er treghetsmomentet til det stive legemet. Innsetting av (4) i (5) gir da

$$G = \frac{128\pi I}{d^4 T^2 \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)}. \quad (6)$$

## Metode og apparatur

For å bestemme skjærmodulen til stål med en statisk metode ble det brukt et oppsett som vist i figur 1.



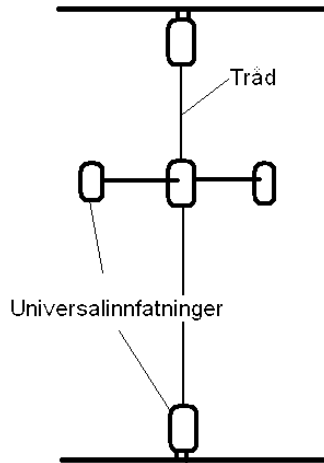
Figur 1: Oppsettet som ble brukt i det statiske forsøket. Loddet ble festet på den lange stanga som da tippet over. Den korte stanga ble så brukt til å vri den lengste tråden til den lange stanga igjen lå horisontalt.

En universalinnfatning ble spent opp med to ståltråder (pianotråder). Trådene var festet i ytterligere to universalinnfatninger som igjen var fastmontert i to plater. I den midterste universalinnfatningen ble det fastmontert en lang stang. I den ene av de andre universalinnfatningene, den som var montert sammen med den lengste tråden, ble en kort stang fastmontert. Oppsettet ble justert slik den lange stanga i utgangspunktet lå horisontalt. Ved å feste et lodd på et søkk ytterst på stanga tippet den over på grunn av tyngden til loddet. Den korte stanga ble så brukt til å vri den lengste tråden til den lange staven var tilbake i horisontal stilling. Legg merke til at ved denne framgangsmåten vil den korte tråden være i samme vridningstilstand, dvs. ikke vridd, som før loddet ble satt på plass. Siden bare den lange tråden er vridd kan man bruke ligning (1) til å sette opp dreiemomentbalansen i systemet. Man har at

$$D\theta = mgr, \quad (7)$$

der  $g$  er tyngdeakselerasjonen,  $m$  er massen til loddet og  $r$  er avstanden fra loddet til rotasjonsaksen. Dette uttrykket kan brukes til å bestemme torsjonsstivheten i tråden. Vridningsvinkelen ble funnet ved å måle dreiningen til den korte armen med gradskive.

Massen til loddet ble målt med presisjonsvekt og  $r$  ble målt med linjal. For å bestemme  $G$  kan så ligning (2) benyttes. Tråddiameteren ble målt med mikrometerskrue og torsjonsstivheten funnet ved ligning (7) settes inn i uttrykket.



Figur 2: Torsjonspendelen som ble brukt i det dynamiske forsøket. Ved å gi stanga med universalinnfatningene en dreining rundt tråddaksen kommer systemet ut av likevektsposisjonen og en pendelbevegelse vil oppstå når stanga slippes.

For å gjøre en dynamisk bestemmelse av skjærmodulen ble en torsjonspendel benyttet. Torsjonspendelen ble bygget med de samme trådene og universalinnfatningene som i det statiske forsøket, men utstyret ble nå montert slik at trådene ble stående vertikalt som i figur 2. En lang arm ble montert i den midterste universalinnfatningen slik at den stakk omtrent like langt ut på begge sider. På hver ende ble det festet to andre universalinnfatninger med masse  $M_1$  og  $M_2$ . Det totale treghetsmomentet til pendelen finnes da ved

$$I = M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + \frac{1}{12} M_s l_s^2, \quad (8)$$

der  $r_1$  og  $r_2$  er avstanden fra hvert av de to loddene til rotasjonsaksen. Det siste leddet i (8) er bidraget til treghetsmomentet fra stanga, der  $M_s$  er stangas masse og  $l_s$  stangas lengde. I dette tilfellet er det antatt at bidraget fra det midtre universalinnfestet er neglisjerbart og de to andre universalinnfestene er behandlet som punktlegemer. En utledning av treghetsmomentet til en tynn stang er vist for eksempel av Mikkelsen og Sikorski [2]. Svingetida ble bestemt ved å måle tida for ti svingeperioder og dele på ti. Skjærmodulen kan tilslutt bestemmes ved benyttelse av ligning 6.

## Resultat og diskusjon

Resultatene av målingene i det statiske eksperimentet er ført opp i tabell 1. Torsjonsstivheten  $D_t$  til tråden som ble vridd kan bestemmes utfra målte størrelser ved bruk av ligningen for dreiemomentbalanse (7). Deretter finnes skjærmodulen ved bruk av ligning 2.

I det dynamiske forsøket målte vi verdiene ført opp i tabell 2. Innsetting av uttrykket for treghetsmomentet (8) i uttrykket for svingeperioden (5) gjør det mulig å bestemme torsjonsstivheten  $D_p$  til torsjonspendelen. Skjærmodulen til trådmaterialet kan da bestemmes ved ligning (4).

Tabell 1: Målte verdier i det statiske forsøket.

Størrelse	Målt verdi	Usikkerhet
$L(\text{cm})$	30,4	0,3
$\theta(\text{rad})$	0,87	0,05
$m(\text{g})$	1,52	0,01
$d(\text{mm})$	0,5	0,01

Tabell 2: Målte verdier i det dynamiske forsøket.

Størrelse	Målt verdi	Usikkerhet
$L_1(\text{cm})$	30,4	0,3
$L_2(\text{cm})$	14,2	0,3
$r_1(\text{cm})$	7,2	0,2
$r_2(\text{cm})$	7,4	0,2
$l_s(\text{cm})$	16,8	0,2
$M_1(\text{g})$	45,44	0,01
$M_2(\text{g})$	48,74	0,01
$M_s(\text{g})$	17,78	0,01
$10T(\text{s})$	24,5	0,3

Innsetting av de målte verdiene gir  $D_t = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{Nm}$  og  $D_p = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{Nm}$ . Dette gir henholdsvis verdiene  $G_{\text{stat}} = 9,8 \cdot 10^{10} \text{N/m}^2$  og  $G_{\text{dyn}} = 8,1 \cdot 10^{10} \text{N/m}^2$  for skjærmodulen.

Gauss feilforplantningslov har blitt benyttet til å bestemme usikkerheten i de to målingene av  $G$ . Man får da

$$\left(\frac{\Delta G}{G}\right)_{\text{stat}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{4\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \theta}{\theta}\right)^2} \quad (9)$$

og

$$\left(\frac{\Delta G}{G}\right)_{\text{dyn}} = \sqrt{2\left(\frac{\Delta m_1}{m_1}\right)^2 + 2\left(\frac{2\Delta r_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta M_s}{M_s}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{4\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda}\right)^2} \quad (10)$$

i det statiske og dynamiske tilfellet. I (10) er det for enkelhets skyld brukt en hjelpestørrelse  $\lambda = 1/L_1 + 1/L_2$  slik at

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{\Delta L_1}{L_1 + \frac{L_1^2}{L_2}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L_2}{\frac{L_2^2}{L_1} + L_2}\right)^2}. \quad (11)$$

I det dynamiske tilfellet er det også antatt at  $\Delta r_1/r_1 = \Delta r_2/r_2$  og  $\Delta m_1/m_1 = \Delta m_2/m_2$  siden de to parene med verdier er omtrent like store og målt på samme måte. Usikkerhetene blir da henholdsvis  $1,5 \cdot 10^{10} \text{N/m}^2$  ved statisk bestemmelse og  $0,8 \cdot 10^{10} \text{N/m}^2$  ved dynamisk bestemmelse av  $G$ .

Torsjonsstivheten er en geometriavhengig parameter og skal derfor ikke være lik for de to oppsettene som er brukt. Observer imidlertid at  $D_p > D_t$ . I det dynamiske oppsettet er det to tråder som gir motstand mot rotasjon ut av likevektstilstanden - derfor er også torsjonsstivheten større for torsjonspendelen er for den lange tråden alene. Skjærmodulen er derimot en materialkonstant slik at man bør forvente å få tilsvarende verdier i de to deleksperimentene. Innenfor måleusikkerheten er dette tilfelle. Tabellverdien for skjærmodulen til stål er  $8,4 \cdot 10^{10} \text{N/m}^2$ . Dette er innenfor

usikkerhetsintervallene til begge verdiene funnet som beskrevet i denne rapporten. Utifra usikkerhetsberegningne kan vi anta at den dynamiske målingen er bedre enn den statiske målingen. Dette vil være gyldig så lenge det ikke har vært noen systematiske feil med i bildet.

## Konklusjon

Skjærmodulen til stål har blitt bestemt på statisk og en dynamisk måte. De to verdiene er henholdsvis  $G_{\text{stat}} = 9,8 \cdot 10^{10} \pm 1,5 \cdot 10^{10} \text{N/m}^2$  og  $G_{\text{dyn}} = 8,1 \cdot 10^{10} \pm 0,8 \cdot 10^{10} \text{N/m}^2$ . Verdiene har altså overlappende usikkerhetsintervall. Begge usikkerhetsintervallene inkluderer også tabellverdien for skjærmodulen til stål. Størrelsen på usikkerhetsintervallene antyder at den dynamiske målemetoden gir en mer nøyaktig verdi for skjærmodulen enn den statiske.

## Referanser

- [1] Marcelo Alonso og Edward J. Finn, *Physics*, Prentice Hall, 1992, (tidligere lærebok i mekanisk fysikk)
- [2] Arne Mikkelsen og Pawel Sikorski, labhefte i TFY Mekanisk fysikk, høsten 2007.