TFY 4240
Øving 1; Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Ladningstettheten på kulen er

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \underline{\frac{3}{4}\frac{Q}{\pi R^3}}$$

b) Vi legger en sfærisk gaussflate med radius $r > R$ omkring kulen. Av Gauss' lov

$$\begin{aligned}\frac{Q}{\varepsilon_0} &= \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \oint E dA = E 4\pi r^2 \\ E(r) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\end{aligned}$$

Feltet er rettet radielt utover og kan på vektorform skrives

$$\underline{\mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathbf{u}_r} \qquad r \geq R$$

Den elektriske potensialdifferansen mellom to punkter P_1 og P_2 utenfor kulen er gitt ved, se ligning (19.21) i læreboken

$$V(P_1) - V(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Dersom vi definerer $V(P_2) = 0$ for $r_2 = \infty$, og setter $r = r_1$, blir potensialet

$$\underline{V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}} \qquad r \geq R$$

c) For å finne feltet inne i kulen legger vi en sfærisk gaussflate med radius $r < R$. Ladningen innenfor denne flaten er

$$\begin{aligned}Q' &= \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{3}{4}\frac{Q}{\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3 \\ Q' &= \left(\frac{r}{R}\right)^3 Q\end{aligned}$$

Gauss' lov gir nå

$$
\begin{aligned}
\frac{Q'}{\varepsilon_0} &= \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \oint E dA = E4\pi r^2 \\
\left(\frac{r}{R}\right)^3 \frac{Q}{\varepsilon_0} &= E4\pi r^2
\end{aligned}
$$

Feltet er rettet radielt utover og kan på vektorform skrives

$$
\underline{\mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}\mathbf{u}_r} \qquad r \le R
$$

For å finne potensialet for et punkt $P_1(r < R)$ inne i kulen må vi integrere i to trinn, først fra punktet og ut til kuleflaten $r = R$, og deretter videre utover

$$
\begin{aligned}
V(P_1) - V(P_2) &= \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\int_r^R r dr + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^{r_2} \frac{1}{r^2} dr \\
V(P_1) - V(P_2) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\frac{1}{2}\left(R^2 - r^2\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_2}\right)
\end{aligned}
$$

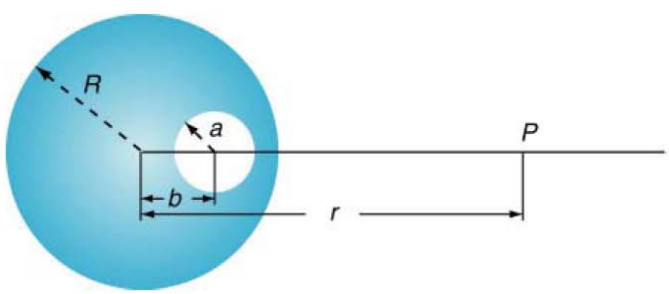
Igjen definerer $V(P_2) = 0$ for $r_2 = \infty$, og setter P_1 $(r_1 = r)$. Det gir

$$
V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{R} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^3} + \frac{1}{R}\right)
$$

Potensialet innenfor kulen blir da

$$
\underline{V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2}\frac{1}{R} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^3}\right)} \qquad r \le R
$$

Vi ser at resultatet blir det samme som i punkt b) dersom $r = R$.



Figur 9: Illustrasjon til oppgave 19.22.

d) Feltet i kaviteten kan ses på summen av feltet fra kulen uten hull og feltet fra en *negativ* ladning Q'' i hullet, slik at nettoladningen her blir null.. Denne negative ladningen er

$$
Q'' = -\rho\frac{4}{3}\pi a^3 = -\frac{3}{4}\frac{Q}{\pi R^3}\frac{4}{3}\pi a^3 = -Q\left(\frac{a}{R}\right)^3
$$

Feltet blir da

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b}{R^3}\mathbf{u}_r + \frac{Q''}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r'}{a^3}\mathbf{u}_r$$

der $r' < a$ er avstanden fra sentrum i hullet til feltpunktet. Men i *sentrum* av kaviteten er $r' = 0$, derfor er blir feltet her

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b}{R^3}\mathbf{u}_r$$

som er det samme som om kaviteten ikke finnes.

e) I punktet P, se figuren, er feltet rettet radielt utover på grunn av symmetrien. Det har bidrag fra to ladningsfordelinger - den opprinnelige kulen med en positiv ladning Q og den negative ladningen Q'' i kaviteten. Vi finner de to feltbidragene i P ved hjelp av Gauss' lov

$$\begin{aligned}
\frac{Q}{\varepsilon_0} &= \oint \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{A} = \oint E_1 dA = E_1 4\pi r^2 \\
E_1 &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

For å finne feltbidraget fra den negative ladningen Q'' må vi legge sentrum for gaussflaten i kavitetens sentrum

$$\begin{aligned}
\frac{Q''}{\varepsilon_0} &= \oint \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{A} = \oint E_2 dA = E_2 4\pi (r-b)^2 \\
-\frac{Q}{\varepsilon_0}\left(\frac{a}{R}\right)^3 &= E_2 4\pi (r-b)^2 \\
E_2 &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\frac{a}{R}\right)^3}{(r-b)^2}
\end{aligned}$$

Begge feltbidragene er rettet radielt utover, og det totale feltet i P blir

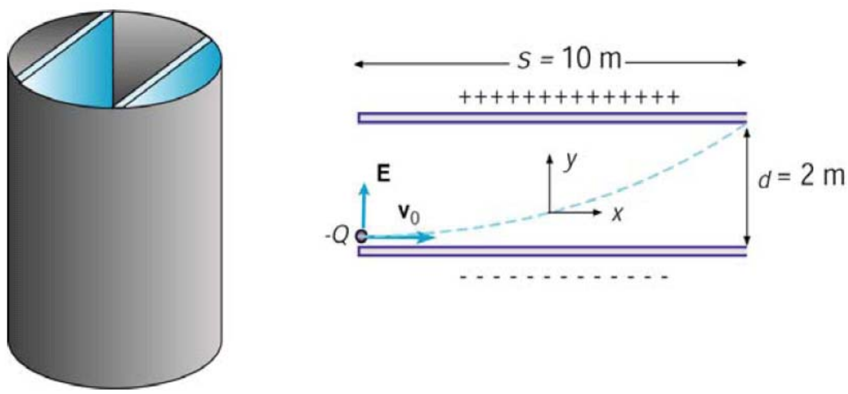
$$\begin{aligned}
E &= E_1 + E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\frac{a}{R}\right)^3}{(r-b)^2} \\
&\underline{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{\left(\frac{a}{R}\right)^3}{(r-b)^2}\right]}
\end{aligned}$$

Legg merke til at dersom punktet P ikke ligger på aksen gjennom kulens og kavitetens sentrum, ville de to feltbidragene ikke være parallelle.

Oppgave 2

a) En ladning Q kommer inn nederst mellom prespiratorplatene som vist til høyre på figuren. Støvpartiklen avbøyes av det elektriske feltet mellom platene (vi kan se bort fra tyngdekraften som vil være mye mindre). Bevegelsen av ladningen er gitt ved

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \\ y &= \frac{1}{2} a_y t^2 = \frac{QE}{2m} t^2 = \frac{QV}{2md} t^2 \end{aligned}$$



Figur 14: Illustrasjon til oppgave 19.28.

Vi eliminerer t og får

$$y = \frac{QV}{2md} \left(\frac{x}{v_0} \right)^2$$

For at støvpartiklen akkurat skal treffe enden av øvre plate må vi ha $x = s$ og $y = d$, det gir

$$\begin{aligned} d &= \frac{QV}{2md} \left(\frac{s}{v_0} \right)^2 \\ Q &= \frac{2md^2 v_0^2}{Vs^2} = \frac{2 \times (10^{-14}\ \mathrm{kg}) \times (2\ \mathrm{m})^2 \times (1\ \mathrm{m/s})^2}{(50\ \mathrm{V}) \times (10\ \mathrm{m})^2} \\ &\underline{Q = 1 \times 10^{-17}\ \mathrm{C}} \end{aligned}$$