

Labforsøk: Måling av tyngdeakselerasjonen

Hans Rød-Bethe, Albert Tostein, Isak Nytnun

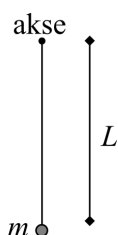
22.02.2022

Hensikt

Vi skal bestemme en lokal verdi for tyngdeakselerasjonen g i Trondheimsområdet ved å måle svingetiden til en enkel (matematisk) pendel.

Teori

En enkel/matematisk pendel består av en punktmasse m festet til en masseløs snor/stang med lengde L , som kan svinge friksjonsfritt om en rotasjonsakse som står vinkelrett på pendelens svingeplan. Se figuren under.



Figur 1: Matematisk pendel med lengde L

For små vinkelutslag oppfører en matematisk pendel seg som en harmonisk oscillator¹, med svingetid T gitt ved[4]

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

der g er den lokale verdien for tyngdeakselerasjonen.

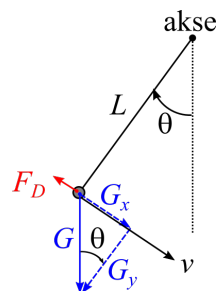
Ved å måle L og T kan vi derfor bestemme en verdi for g ved

$$g = L \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2. \quad (1)$$

¹Tilnærmelsen $\sin \theta \approx \theta$ avviker med mindre enn 1 % fra eksakt verdi for vinkler $\theta \lesssim 14^\circ$.

Luftmotstandens innvirkning

Figuren under viser de to kreftene som virker på en matematisk pendel ved luftmotstand: i tillegg til tyngden G virker luftmotstanden F_D tangentielt (x -retning på figuren) og mot bevegelsen:



Figur 2: Krefter på matematisk pendel ved luftmotstand

Luftmotstanden F_D på et kuleformet legeme med radius R i hastighetsregimet som er aktuelt for forsøket, er gitt ved Stokes' lov:

$$F_D = 6\pi\mu Rv,$$

der μ er den dynamiske viskositeten til mediet som kula beveger seg i, og v er farten til legemet. For luft ved er $\mu = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

Ettersom F_D og $G = mg$ er de eneste kreftene som virker, kan vi som et mål på luftmotstandens innvirkning på måleresultatene, bruke forholdet F_D/mg :

$$\frac{F_D}{mg} = \frac{6\pi\mu Rv}{mg} \quad (2)$$

Farten er størst i likevektspunktet $\theta = 0$, så hvis kula slippes fra et startutslag θ_0 , kan vi finne et overestimat for kulas maksimale banefart v_{max} ved

å anta tilnærmet bevaring av mekanisk energi:

$$mgL(1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

$$v_{max} = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta_0)}$$

Med en pendellengde $L = 1,09 \text{ m}$ og $\theta_0 = 10^\circ$ får vi $v_{max} \approx 0,6 \text{ m/s} \sim 1 \text{ m/s}$.

Ved maksimal fart, og dermed maksimal luftmotstand, finner vi følgende størrelsesorden-estimat for F_D/mg når vi har $R \sim 10^{-2} \text{ m}$ og $m \sim 10^{-1} \text{ kg}$:

$$\frac{F_D}{mg} = \frac{6\pi\mu Rv}{mg}$$

$$\sim \frac{10 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 1 \text{ m/s}}{10^{-1} \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2}$$

$$\sim 10^{-3} \quad (3)$$

Avvik fra matematisk/enkel pendel

En reell pendelkule har en viss utstrekning og utgjør derfor egentlig en fysisk pendel med svingetid gitt ved

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}},$$

der I er treghetsmomentet om rotasjonsaksen, og h er avstanden mellom kulas massesenter og rotasjonsaksen. For en kule med radius r opphengt i en snor med lengde L , er $h = L + r$ og fra Steiners sats er $I = \frac{2}{5}mr^2 + mh^2$.

Det relative avviket i svingetid når pendelen modelleres som hhv. en fysisk pendel med svingetid T' og en matematisk pendel med svingetid T , blir lik

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{T' - T}{T}$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} - 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\frac{2}{5}mr^2 + mh^2}{mgh}} - \sqrt{\frac{L}{g}}}{\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

$$\sim \left(\frac{r}{h}\right)^2.$$

Ettersom $r/h \sim 1/100$, blir altså $\Delta T/T \sim 1/10^4$, dvs. den forenklede pendelmodellen gir neglisjerbar feil.

Gauss' feilforplantningslov

Gitt en størrelse f som beregnes fra målte størrelser x, y osv., der de målte størrelsene har usikkerhet hhv. $\delta x, \delta y$ osv. Usikkerheten i de målte størrelsene forplanter seg til den beregnede verdien av f i følge Gauss' feilforplantningslov [3], som gir følgende usikkerhet for f :

$$\delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \delta y\right)^2 + \dots}$$

Anvendt på (1) blir usikkerheten i den beregnede tyngdeakselerasjonen, som funksjon av målte verdier for L og T , lik

$$\delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial L} \cdot \delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} \cdot \delta T\right)^2}$$

$$\sqrt{\left(\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \delta L\right)^2 + \left(\frac{8\pi^2 L}{T^3} \cdot \delta T\right)^2}. \quad (4)$$

Den relative betydningen av feilmålinger i hhv. T og L kan angis av forholdet

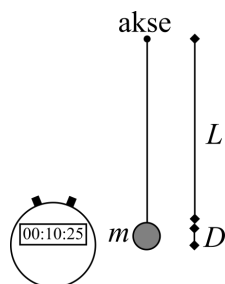
$$\frac{\frac{\partial g}{\partial T} \cdot \delta T}{\frac{\partial g}{\partial L} \cdot \delta L} = 2 \frac{L}{T} \frac{\delta T}{\delta L} \quad (5)$$

Metode

1. Et kuleformet lodd ble hengt opp i et tynt fiskesnøre og satt i svingninger med startutslag på ca. 10° .
2. Tiden for 10 hele svingninger (fra maksimalt utslag og tilbake) ble målt med stoppeklokke, og gjennomsnittlig svingetid ble bestemt.
3. Det ble foretatt 10 måleserier.
4. En verdi for tyngdeakselerasjonen g ble beregnet på bakgrunn av målingene.
5. En kontrollmåling av g ble foretatt ved avlesning av akselerometeret i en mobiltelefon ved bruk av appen phyphox[1].

Utstyrsoppsett

En kule med masse $m = (100,0 \pm 0,5) \text{ g}$ og diameter $D = (1,0 \pm 0,1) \text{ cm}$ ble hengt opp i en tynn fiskesene med lengde $L = (1,09 \pm 0,001) \text{ m}$.



Figur 3: Utstyrsoppsett for forsøket

Resultater

Tabell 1 viser svingetid T for hver måleserie, der hver verdi er beregnet fra total tid for 10 hele svingninger fra maksimalt utslag.

Serie nr.	T [s]
1	2,098
2	2,106
3	2,104
4	2,105
5	2,103
6	2,091
7	2,098
8	2,110
9	2,118
10	2,119

Tabell 1: Svingetid for pendel

Basert på disse målingene blir hhv. gjennomsnittlig svingetid $\bar{T}$ og standardfeilen $\delta\bar{T}$ lik

$$\bar{T} = 2,105 \text{ s}, \quad \delta\bar{T} = 0,009 \text{ s},$$

slik at målt svingetid for pendelen blir

$$T = (2,105 \pm 0,009) \text{ s}.$$

Den beregnede verdien er tyngdeakselerasjonen g blir da fra (1)

$$g = (9,71 \pm 0,08) \text{ m/s}^2,$$

der usikkerheten i g er beregnet fra (4).

I tillegg ble g kontrollmålt i Android-appen phyp-hox, ved å lese av akselerometeret på en Samsung A52-telefon med en oppdateringsfrekvens på 900 Hz over et tidsrom på 10 s. Dette gav resultatet

$$g = (9,78 \pm 0,02) \text{ m/s}^2$$

Diskusjon

Vi fant i (3) at $F_D/mg \sim 10^{-3}$, slik at luftmotstanden kan forventes å påvirke måleresultatene på promillenivå - og at luftmotstand derfor er en uvesentlig systematisk feilkilde.

Pendellengden L ble målt med tomme stokk, som kan antas å ha en avlesningsnøyaktighet på ± 1 mm. Feilavlesning av lengden utgjør en tilfeldig feilkilde.

Svingetiden T for pendelen ble målt som gjennomsnittet av 10 hele svingninger for hver måleserie, slik at betydningen av tilfeldige feil i tidsmålingene reduseres - noe som bekreftes av at usikkerheten i svingetiden var 9 ms.

Ut i fra (5) blir den relative betydningen av feilmålinger av hhv. T og L lik

$$2 \frac{L}{T} \frac{\delta T}{\delta L} = 2 \cdot \frac{1,09 \text{ m}}{2,105 \text{ s}} \cdot \frac{0,009 \text{ s}}{0,001 \text{ m}} \approx \underline{9}.$$

Feilmåling av T vil altså ha større innvirkning på den beregnede verdien for g enn feilmålinger av L .

Intervall for den beregnede verdien av tyngdeakselerasjonen på $g = (9,71 \pm 0,08) \text{ m/s}^2$ ligger like utenfor verdien $g = 9,82 \text{ m/s}^2$ som kan beregnes online for gitte GPS-koordinater hos International Gravimetric Bureau (BGI)[2].

Konklusjon

En lokal verdi for tyngdens akselerasjon i Trondheimsområdet ble beregnet til $g = (9,71 \pm 0,08) \text{ m/s}^2$ på grunnlag av svingetiden til en matematisk pendel. Kontrollmåling med akselerometeret i en smarttelefon gav resultatet $(9,78 \pm 0,02) \text{ m/s}^2$, mens International Gravimetric Bureau angir en verdi på $g = 9,82 \text{ m/s}^2$. Tilfeldige feil i målinger av svingetiden utgjør den største feilkilden.

Referanser

- [1] phyphox. <https://phyphox.org/>, 2022. Nettside, sjekket 27.01.2022.
- [2] BGI. Beregning av tyngdeaks. <http://bgi.obs-mip.fr/data-products/outils/prediction-of-gravity-value/>, 2022.
- [3] Paolo Fornasini. The Uncertainty in Physical Measurements. Springer-Verlag GmbH, September 2008.
- [4] Samuel Ling. University physics. OpenStax College, Rice University, Open Textbook Library, Houston, Texas Minneapolis, 2016.