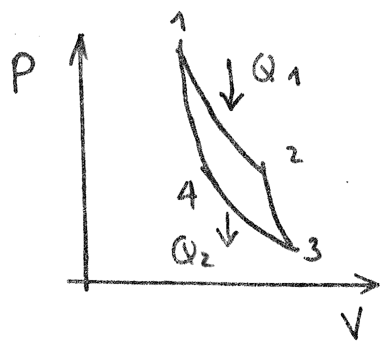
EKSAMEN VÅR 87. — 70525

OPPGAVE 1

Reversibel prosess: En prosess som er så langsom at systemet kan regnes for å være i termodynamisk likevekt under hele prosessen.

Adiabatisk prosess: En varmeisolert prosess ; $\Delta Q = 0$

CARNOT PROSESSEN.



1-2 : Isoterm prosess, $T = T_H$

2-3 : Adiabat : $\Delta Q = 0$

3-4 : Isoterm , $T = T_L$

4-1 : Adiabat ; $\Delta Q = 0$

$W = Q_1 + Q_2 \qquad Q_2 < 0$

Virkningsgrad def: $\eta = \dfrac{W}{Q_1} = \dfrac{Q_1 + Q_2}{Q_1}$

Temperaturavhengighet $\eta = \dfrac{T_H - T_L}{T_H}$

b) Vi anvender def. på virkningsgrad
Søkt er Q_2, kjent er W

$$\eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{W}{Q_1} = \frac{W}{W - Q_2}$$

$$\Rightarrow \quad -Q_2 = W \, \frac{1-\eta}{\eta}$$

Vi vet også verdien av η da vi kjenner T_H og T_L

$$\eta = \frac{T_H - T_L}{T_H} = \frac{520 - 290}{520} = 0.442$$

$$\underline{\underline{-Q_2}} = 10^9 \, \frac{1 - 0.442}{0.442} \approx \underline{\underline{1.262 \cdot 10^9 \text{ W}}}$$

Dette avgis til elvevannet.

Varmebalansen i elva:

$$|Q_2| = C_v \cdot \rho \cdot M \, \Delta T$$

$$\Rightarrow \quad \Delta T = \frac{|Q_2|}{C_v \cdot \rho \cdot M}$$

$C_v = 4.2 \cdot 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$
$= 4.2 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3 \cdot \text{K}$

$$\underline{\underline{\Delta T}} = \frac{1.26 \cdot 10^9}{4.2 \cdot 10^6 \cdot 40} = \underline{\underline{7.5 \text{ K}}}$$

c) Oppgitt $N = 1$ mol.
Gasslignigen blir da $pV = RT$.

Punkt 3. $T_3 = 293\,K$ $p_3 = 1.01 \cdot 10^5$ Pa

Fra gasslignigen:
$$\underline{V_3} = \frac{RT_3}{p_3} = \frac{8.31 \cdot 293}{1{,}01 \cdot 10^5} = \underline{0.0241\ m^3}$$
$$= \underline{\underline{24.1\ l}}$$

Punkt 2: $V_2 = V_3 = 24.1\ l$
$T_2 = 373\ K$
$$\frac{p_3}{T_3} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow p_2 = p_3 \frac{T_2}{T_3}$$

$$p_2 = \frac{T_2}{T_3} p_3 = \frac{373}{293} \cdot 1.01 \cdot 10^5$$

$$\underline{\underline{p_2 = 1.29 \cdot 10^5\ Pa}}$$

Punkt 1: $\underline{T_1 = T_2 = 373\ K}$
Fra adiabatligningen $TV^{\gamma-1} = \text{konst}$

$$V_1^{\gamma-1} T_1 = V_3^{\gamma-1} T_3$$
$$\Rightarrow V_1 = V_3 \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 24.1 \cdot \left(\frac{293}{373}\right)^{\frac{1}{1.4-1}} = 13.2$$

$$\underline{\underline{V_1 = 13.2\ l}}$$

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \Rightarrow \underline{\underline{p_1}} = p_2 \frac{V_2}{V_1} = 1.29 \cdot 10^5 \cdot \frac{24.1}{13.2} = 2.35 \cdot 10

d) Vi baserer oss på varmebalansen

$\Delta Q_{12} = ?$ Gitt av $dQ = du + pdV$
$= C_V dT + pdV$

$dT = 0$ for en ~~adiabat~~ isoterm. Dette gir

$$\Delta Q_{12} = \int p dV = RT_2 \int \frac{dV}{V} = RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Delta Q_{23} = C_V (T_3 - T_2)$$

$Q_{31} = 0$; adiabatisk prosess.

Dette gir

$$W = \sum \Delta Q = RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} + C_V (T_3 - T_2)$$

Nå er $C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$

Dette gir derfor:

$$W = R\left(T_2 \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{1}{\gamma - 1}(T_3 - T_2)\right)$$

$$= 8.31 \left(373 \ln \frac{24.1}{13.2} + \frac{1}{1.4 - 1}(293 - 373)\right)$$

$$\underline{\underline{= 197.8 \text{ J}}}$$

Virkningsgraden η er gitt av

$$\eta = \frac{W}{Q_{12}} = \frac{R\left(T_2 \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{1}{\gamma - 1}(T_3 - T_2)\right)}{RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

$$\eta = 1 + \frac{1}{\gamma - 1} \, \frac{\frac{T_3}{T_2} - 1}{\ln \frac{V_2}{V_1}}$$

Fra adiabatligningen fås

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{\gamma - 1} \ln \frac{T_1}{T_3}$$

Dette gir:

$$\underline{\underline{\eta = 1 - \frac{1 - \frac{T_3}{T_2}}{\ln \frac{T_1}{T_3}}}} = \underline{\underline{0.11}}$$

OPPGAVE 2

a) "Ohms" lov: $\dot{Q} R = \Delta T$

Her er:

$\dot{Q}$	Varmestrøm
R	Resistans
ΔT	Temperaturforskjell

Analogien gitt av:

$$\dot{Q} \leftrightarrow I$$
$$\Delta T \leftrightarrow V$$
$$R \leftrightarrow R$$

Oppgave 2

$\xi_1 = A \sin(k_1x-\omega_1t) = A \sin[2\pi(x/\lambda_1-t/P_1)]$

$\xi_2 = A \sin(k_2x-\omega_2t) = A \sin[2\pi(x/\lambda_2-t/P_2)]$

a) Med dispersjon menes at ulike bølgefrekvenser (bølgelengder) forplantes med ulik hastighet, dvs. at $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\Lambda}{P}$ varierer med ω (og k). I dette tilfellet har vi $v_1=\lambda_1/P_1=$ <u>2,34 m/s</u> og $v_2=\lambda_2/P_2=$ <u>2,58 m/s</u> $> v_1$. Dvs. <u>vi har dispersjon.</u>

b) Formelen $\sin u + \sin v = 2 \cos[(u-v)/2] \sin[(u+v)/2]$ gir at resultantbølgen kan skrives som:

$\xi = \xi_1+\xi_2 = A(x,t) \sin(kx-\omega t)$, hvor

$A(x,t) = 2A \cos[\frac{k_1-k_2}{2} x - \frac{\omega_1-\omega_2}{2} t]$ er en amplitude som varierer i rom og tid,

$k=(k_1+k_2)/2$, og $\omega = (\omega_1+\omega_2)/2$.

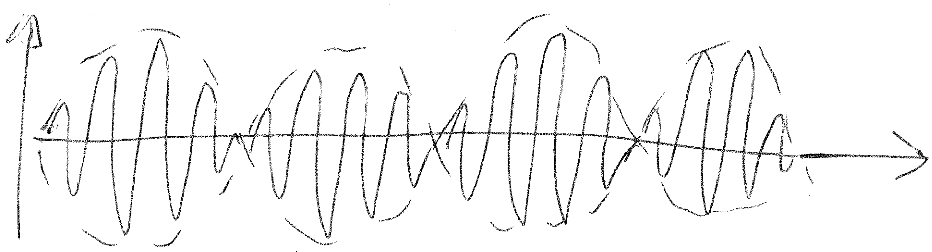
Resultantbølgen forplantes med fasehastigheten: $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_1+\omega_2}{k_1+k_2} = \frac{1/P_1+1/P_2}{1/\lambda_1+1/\lambda_2}$.

Amplitudevariasjonen $A(x,t)$ forplantes også som en "bølge", men med hastighet lik gruppehastigheten: $v_g = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} = \frac{1/P_1-1/P_2}{1/\lambda_1-1/\lambda_2}$ $(\approx \frac{d\omega}{dk})$.

c) Innsatt for oppgitte data i formlene for v og v_g fås:

<u>v = 2,447 m/s</u> og <u>v_g = 1,222 m/s.</u>

d) Figur:



"Bølgelengden" for amplitudevariasjonene er 2Λ hvor Λ er avstanden mellom nullpunktene, dvs "lengden" av en gruppe. Dvs. $(k_1-k_2)/2 = 2\pi/(2\Lambda)$, slik at

$\frac{1}{\Lambda} = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}$. Avstanden mellom hver bølgetopp er $\lambda = 2\pi/k$, slik at

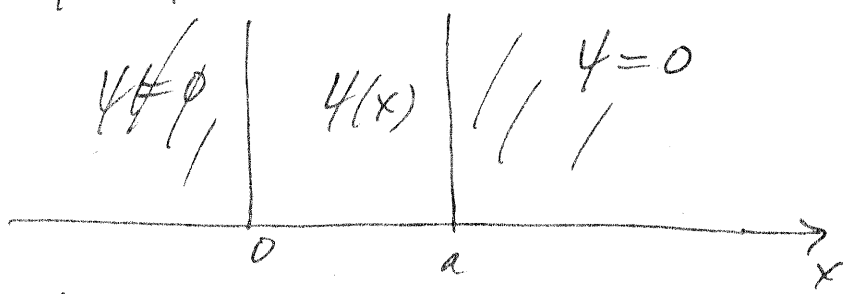
$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2})$. Vi får $\frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{1}{2}\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} = 5,24$. Dvs. <u>vi har 5 bølgetopper pr. gruppe.</u>

e) Bølgetoppene forplantes med hastighet v. Bølgegruppen forplantes med hastighet v_g. Relativhastighet $v_r = v-v_g = 1.22$ m/s. Tiden en bølgetopp befinner seg i en bølgegruppe: $t = \frac{\Lambda}{v_r} =$ <u>8,54 s.</u>

Oppgave IV

a) i.
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

ii. Generell løsning
$$\psi = A\sin kx + B\cos kx$$



$\psi = 0$ for $x = 0$
$\psi = 0$ " $x = a$

$x = 0$: $\quad 0 = 0 + B\cdot 1$
$$\Rightarrow B = 0$$
$$\psi = A\sin kx$$

$x = a$ $\quad 0 = A\sin ka$
$$\Rightarrow ka = n\pi \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$k = \frac{n\pi}{a}$$
$$\underline{\psi = A\sin\frac{n\pi x}{a}}$$

iii.

Normering
$$\int_0^a dx\,\psi^*\psi = 1$$

$$A^2\int_0^a \sin^2\frac{n\pi x}{a}\,dx = 1$$

$$A^2 \cdot \frac{a}{2} = 1$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\underline{\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}}$$

<u>iv.</u>

$$\frac{d\psi}{dx} = A\frac{n\pi}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -A\frac{n^2\pi^2}{a^2}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

Innsatt i Schrödingerligningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-A\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{a} = EA\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{n^2\pi^2}{a^2}A\sin\frac{n\pi x}{a} = EA\sin\frac{n\pi x}{a}$$

Løsning når

$$\underline{E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}n^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

b)

Sannsynlighetstettheten

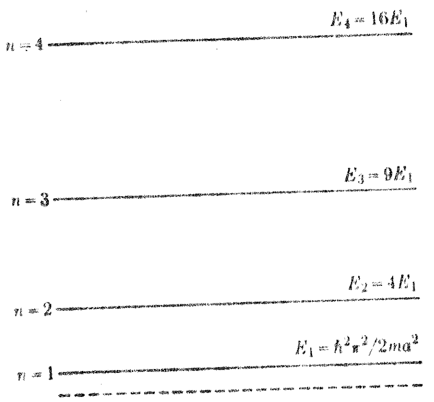
$$\psi\psi^* = \psi^2$$

$n=1$ $\quad \frac{2}{a}\sin^2\frac{\pi x}{a}$, $\quad E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$

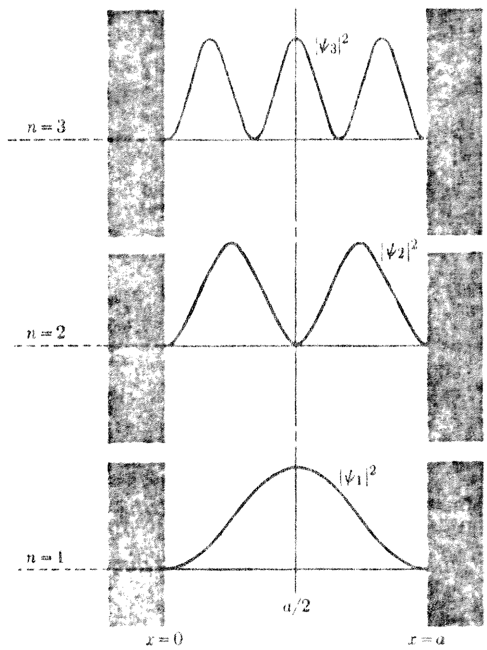
$n=2$ $\quad \frac{2}{a}\sin^2\frac{2\pi x}{a}$, $\quad E_2 = 4E_1$

$n=3$ $\quad \frac{2}{a}\sin^2\frac{3\pi x}{a}$, $\quad E_3 = 9E_1$

osv.



Energinivåskjema



Sannsynlighetstetthet

d)

$$\Delta E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}625\cdot 10^{-34}\cdot 3{,}00\cdot 10^{8}}{451\cdot 10^{-9}}\,J = 4{,}41\cdot 10^{-19}\,J$$

$$\Delta E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}(12^2-11^2) = \frac{h^2\pi^2}{4\pi^2\cdot 2ma^2}(12^2-11^2)$$

$$\Delta E = \frac{6{,}625^2\cdot 10^{-68}}{8\cdot 0{,}911\cdot 10^{-30}a^2}(144-121) = \frac{138{,}5\cdot 10^{-38}}{a^2}$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{138{,}5\cdot 10^{-38}}{4{,}41\cdot 10^{-19}}\,m^2$$

$$\underline{a = 1{,}77\cdot 10^{-9}\,m} = \underline{1{,}77\,nm}$$

c)

Posisjon x:

Symmetri $\Rightarrow \langle x \rangle = \frac{a}{2}$

Elektronet er i boksen $\Rightarrow \Delta x \approx \frac{a}{2}$

~~[illegible]~~

Impuls p: Ingen netto impuls (el. er i boksen) $\Rightarrow \langle p \rangle = 0$

$\Delta x \cdot \Delta p \sim h \Rightarrow \Delta p \sim \frac{2h}{a}$

Energi E: Stasjonære tilstander

$\Rightarrow \Delta t \to \infty \Rightarrow \Delta E = 0$

$\Rightarrow \langle E \rangle = E_1$.