Eksamen i Fag 70525 Fysikk for avd. $IV^{A,B,C}$, 4. juni 1988

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) Skal vise at $E = \sqrt{m^2c^4+p^2c^2}$.

Innsatt for $p = \dfrac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ (oppgitt), fås direkte at

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$ (som oppgitt). QED!

Part. i ro (v=0, dvs. p=0): $\underline{E = mc^2}$

Foton (m=0): $\underline{E = pc}$

b) deBroglie-relasjonene:

$\underline{E= hf,}$ $\quad$ h = Plancks konstant

$\underline{p = h/\lambda}$ $\quad$ f = frekvens, λ=bølgelengde

Fra a): $E=pc \Rightarrow hf=hc/\lambda \Rightarrow \underline{\lambda f = c}$, Stemmer!

Antall fotoner pr.sek.: $\dfrac{1{,}7\cdot 10^{-18}W}{hf} = \dfrac{\lambda \cdot 1{,}7\cdot 10^{-18}W}{hc} =$

$$\frac{6\cdot 10^{-7}m \cdot 1{,}7\cdot 10^{-18}W}{6{,}63\cdot 10^{-34}Js\cdot 3\cdot 10^{8}m/s} = \underline{5{,}13 \text{ fotoner/sek}}$$

c) Som utledning i boka.

Energibevarelse (energi før støt = energi etter støt):

$$pc+m_ec^2 = p'c+\sqrt{m_e^2c^4+P^2c^2}$$

$\Rightarrow$

$$m_e^2c^4+P^2c^2 = [(p-p')c+m_ec^2]^2 \Rightarrow$$
$$m_e^2c^4+P^2c^2 = (p-p')^2c^2+m_e^2c^4+2m_ec^3(p-p') \Rightarrow$$

$$P^2c^2 = (p-p')^2c^2+2m_ec^3(p-p'). \qquad (1)$$

Impulsbevarelse (impuls før støt = impuls etter støt):

$$\vec{p} = \vec{p}'+\vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{p}-\vec{p}' \Rightarrow$$

$$P^2 = (\vec{p}-\vec{p}\,')^2 = p^2+p'^2-2pp'\cos\phi \qquad (2)$$

(ϕ = vinkel $\vec{p},\vec{p}\,'$). (2) inn i (1) gir:

$$p^2c^2+p'^2c^2-2pp'c^2\cos\phi = p^2c^2+p'^2c^2-2pp'c^2+2m_ec^3(p-p') \Rightarrow$$

$$m_ec(p-p') = pp'(1-\cos\phi) \Rightarrow$$

$$1/p' - 1/p = \frac{1}{m_ec}(1-\cos\phi)$$

Innsatt for $p=h/\lambda$ og $p'=h/\lambda'$ fås:

$$\lambda'-\lambda = \frac{h}{m_ec}(1-\cos\phi). \text{ QED!}$$

d) Effekten kalles Compton effekten. Illustrerer at fotoner har partikkelnatur og at de utveksler energi og impuls ved støt på tilsvarende måte som andre partikler.

Ser av uttrykket at $(\lambda'-\lambda)_{max} = \frac{2h}{m_ec} = 4{,}86 \cdot 10^{-12}$m = 0,00486 nm opptrer for $\phi = \pi$ (180°).

Dvs. λ = 0,1 mn og λ' = 0,10486 nm.

Kinetisk elektronenergi etter støtet (elektronet mottar den energien fotonet mister): $hc(1/\lambda-1/\lambda') = 9{,}218 \cdot 10^{-17}$J

I tillegg har elektronet en hvilleenergi $m_ec^2 = 81{,}99 \cdot 10^{-15}$J.

Elektronimpuls etter støtet $P = p+p' = h(1/\lambda+1/\lambda') \approx 2h/\lambda$ = $1{,}3 \cdot 10^{-23}$kgm/s ($P=p+p'$ siden $\phi=\pi$).

Oppgave 2

a) 1.hovedsetning uttrykker energibevarelse: Økning i et systems indre energi ΔU er lik tilført varme Q minus utført arbeid W:

$$\Delta U = Q-W$$

eller

$$Q = \Delta U+W.$$

På differensiell form:

$$dQ = dU + dW = dU + pdV,$$

hvor vi har brukt $dW = pdV$.

$C_p = \frac{1}{N}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_{p=\text{konst.}}$, $C_V = \frac{1}{N}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_{V=\text{konst}}$, N=antall mol.

Bruker $dQ = dU + pdV$.

$NC_v = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V = \frac{dU}{dT}$ siden dV=o og U=U(T) for ideell gass.

$NC_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = \frac{dU}{dT} + \left(p\frac{dV}{dT}\right)_p = NC_v + \left(p\frac{dV}{dT}\right)_p$. =>

$C_p - C_V = \frac{1}{N}\left(p\frac{dV}{dT}\right)_p$. Innsatt fra tilstandslikningen $p*V=NRT$ fås

$\left(p\frac{dV}{dT}\right)_p = NR$ og $\underline{C_p - C_V = R}$.

$\gamma = C_p/C_V \Rightarrow C_V = C_p/\gamma. \Rightarrow C_p - C_V = C_p(1-1/\gamma) = R \Rightarrow$

$\underline{C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1}R}$. QED!

b) Varme tilføres under konstant trykk i delprosess B→C:

$Q_1 = NC_p(T_C - T_B) = NR\frac{\gamma}{\gamma-1}(T_C - T_B)$. Til beregning av T_B har vi adiabatligningen $p_B V_B^\gamma = p_A V_A^\gamma$ og tilstandsligningene $p_A V_A = NRT_A$ og $p_B V_B = NRT_B$. De to siste gir $T_B = T_A(p_B/p_A)(V_B/V_A)$, og adiabatligningen gir $(V_B/V_A) = (p_A/p_B)^{1/\gamma}$. Innsatt fås $T_B = T_A(p_B/p_A)^{1-1/\gamma} = T_A * P^{1-1/\gamma}$, slik at:

$$\underline{Q_1 = NR\frac{\gamma}{\gamma-1}[T_C - T_A * P^{1-1/\gamma}]}. \quad \text{QED!}$$

c) Enklest: Utført arbeid er tilført varme Q_1 (B→C) minus avgitt varme Q_2 (D→A): $W = Q_1 - Q_2$, hvor $Q_2 = NC_p(T_D - T_A) = NR\frac{\gamma}{\gamma-1}[T_D - T_A]$. Til å uttrykke T_D har vi adiabatligningen $p_B V_C^\gamma = p_A V_D^\gamma$ og tilstandsligningene $p_B V_C = NRT_C$ og $p_A V_D = NRT_D$. De to siste gir $T_D = T_C(p_A/p_B)(V_D/V_C)$, og adiabatligningen gir $(V_D/V_C) = (p_B/p_A)^{1/\gamma}$. Dermed fås $T_D = T_C(p_A/p_B)^{1-1/\gamma} = T_C * P^{-(1-1/\gamma)}$. Innsatt fås nå:

$$W = Q_1 - Q_2 = NR\frac{\gamma}{\gamma-1}[(T_C - T_A P^{1-1/\gamma}) - (T_C P^{-(1-1/\gamma)} - T_A)]$$

$$\underline{= NR\frac{\gamma}{\gamma-1}[T_A + T_C - T_A * P^{1-1/\gamma} - T_C * P^{-(1-1/\gamma)}]}. \quad \text{QED!}$$

d) Innfører $x = P^{1-1/\gamma}$ som ny variabel.

$$W(x) = NR\frac{\gamma}{\gamma-1}[T_A + T_C - T_A x - T_C/x]$$

$$W = W_{max} \text{ når } \frac{dW}{dx} = 0.$$

$$\frac{dW}{dx} = NR\frac{\gamma}{\gamma-1}[-T_A + T_C/x^2] = 0 \text{ for } x = x_0 = P^{1-1/\gamma} = \sqrt{T_C/T_A}.$$

Da er $P = (T_C/T_A)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}}$ QED!

og arbeidet er

$$W(x_0) = W_{max} = NR\frac{\gamma}{\gamma-1}[T_A + T_C - 2\sqrt{T_C T_A}\,] = NR\frac{\gamma}{\gamma-1}(\sqrt{T_C} - \sqrt{T_A}\,)^2.\text{QED!}$$

e) Når $W = W_{max}$ er $P^{1-1/\gamma} = \sqrt{T_C/T_A}$ slik at

$$Q_1 = NR\frac{\gamma}{\gamma-1}[T_C - \sqrt{T_A T_C}\,] = NR\frac{\gamma}{\gamma-1}\sqrt{T_C}\,(\sqrt{T_C} - \sqrt{T_A}\,).$$

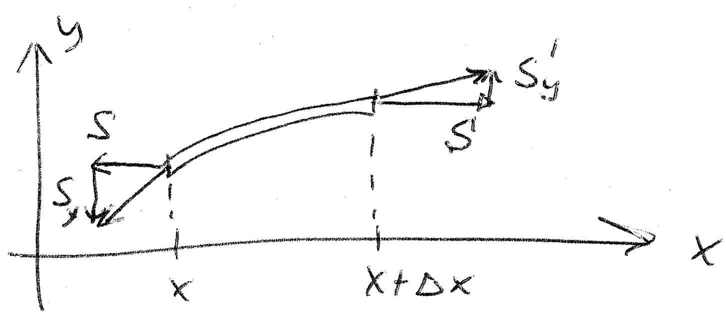
Virkningsgraden blir da:

$$e = \frac{W_{max}}{Q_1} = \frac{\sqrt{T_C} - \sqrt{T_A}}{\sqrt{T_C}} = 1 - \sqrt{T_A/T_C}. \quad \text{QED!}$$

For $T_C = 1200\text{K}$ og $T_A = 300\text{K}$ fås $e = 1 - \sqrt{1/4} = \underline{0,5}$,

dvs 50% virkningsgrad.

Oppgave 3



Samme kraft S i x-retning i begge ender av elementet.

Totalkraften er alltid rettet tangentielt til strengen, dvs:

$$S_y/S = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x \text{ og } S'_y/S = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}.$$

Totalkraft på elementet:

$$F = S'_y - S_y = S\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] = S\,\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x}{\Delta x}\,\Delta x \approx S\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\Delta x.$$

QED!

b) $F = ma \Rightarrow F = \mu\Delta x\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Innsatt fra a) for F:

$S\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\Delta x = \mu\Delta x\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow \underline{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{S}{\mu}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$. Bølgeligning med $c^2 = \frac{S}{\mu}$.

$\underline{c = \sqrt{S/\mu}}$. Innsatt: $c = \sqrt{2{,}5/0{,}1}$ m/s $= \underline{5\text{ m/s}}$.

c) De tre løsningene er av type $f(x\pm ct)$ og lineærkombinasjon av disse. Det er derfor nok å vise at $f(x\pm ct)$ oppfyller bølgeligningen. Vi har:

$\frac{\partial y}{\partial x} = f'(x\pm ct)$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(x\pm ct)$, $\frac{\partial y}{\partial t} = \pm c\cdot f'(x\pm ct)$ og

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (\pm c)^2 f''(x\pm ct) = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Dvs. løsninger av type y_1 og y_2 oppfyller bølgeligningen, og da må også $y_3 = y_1 + y_2$ gjøre det.

y_1 beskriver en bølgepuls som begeger seg i +x-retning med hastighet c.

y_2 beskriver en bølgepuls som beveger seg i −x-retning med samme hastighet.

y_3 beskriver en sammensatt bølge som består av to like pulser som beveger seg i henholdsvis + og − x-retning med samme hastighet c.

d) $f(x) = A\sin(kx)$

$y_1 = f(x-ct) = A\sin(kx-kct) = A\sin(kx-\omega t)$, $\omega = kc$. QED!

$y_2 = f(x+ct) = A\sin(kx+kct) = A\sin(kx+\omega t)$, $\omega = kc$ QED!

$y_3 = f(x-ct)+f(x+ct) = A[\sin(kx-\omega t)+\sin(kx+\omega t)]$

$= A[\sin(kx)\cdot\cos(\omega t) - \cos(kx)\cdot\sin(\omega t) + \sin(kx)\cdot\cos(\omega t) + \cos(kx)\cdot\sin(\omega t)]$

$= 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$, $\omega = kc$ QED!

y_1 og y_2 beskriver harmoniske (sinus-)bølger som beveger seg i, henholdsvis, +x og −x − retning.

y_3 beskriver en stående bølge (summen av y_1 og y_2).

e) Dette tilfellet beskrives av løsningen $y_s = 2A \sin(kx)\cos(\omega t)$.
Vi må ha at $L = n\lambda/2$, $n=1,2,3\ldots$osv. $\lambda \cdot f=c$ gir at de mulige frekvenser og bølgelengder er gitt av:

$$f= f_n=c/\lambda = \frac{c}{2L}\cdot n, \quad \lambda =\lambda_n= 2L/n, \quad n=1,2,\ldots \text{osv.}$$

Vi har $f_n=f_1\cdot n$, hvor $f_1=c/(2L) = 2{,}5$ Hz. Dvs. det er 20 mulige frekvenser i området $f\leq 50$Hz.

Punkter hvor $y=0$ for alle t kalles knutepunkter. De ligger med mellomrom på $\lambda/2$.

For $f=25$Hz er $n=10$ og $\lambda/2=L/10=0{,}1$ m. Vi har da 9 knutepunkter i tillegg til endepunktene.