Teor. Fysikk IB

Eksamen STATISTISK MEKANIKK 11. 12. 1975

Løsningsskisse :

Oppgave 1

a)
$$\rho(\vec{p}_1, \ldots \vec{q}_N) = \frac{1}{h^{3N} N!} e^{\frac{F - H(\vec{p}_1, \ldots \vec{q}_N)}{kT}}$$

Definisjoner av ρ, p_i, q_i, h, N, F, k, T, H.
Ekvipartisjonsprinsippet: Ethvert kvadratisk ledd i Hamiltonfunksjonen har middelverdi $\frac{1}{2}kT$. Den angjeldende koordinat må ikke forekomme i den resterende del av H.

Bevis:
$$\langle \alpha q_1^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha q_1^2 \, e^{-\alpha q_1^2/kT} \, dq_1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha q_1^2/kT} \, dq_1} = \frac{1}{2} kT.$$

b) Den kanoniske sannsynlighetstetthet har følgende z-avhengighet ($\beta = 1/kT$)

$$\rho \propto e^{-(mgz - a\ln z)\beta} = z^{a\beta} e^{-mg\beta z}$$

så sannsynligheten for å finne partikkelen i en avstand mellom z og z+dz er

$$P(z)\,dz = C\, z^{a\beta} e^{-mg\beta z} dz,$$

der normeringskonstanten C er bestemt av $\int_0^\infty P(z)dz = 1$, D.v.s.

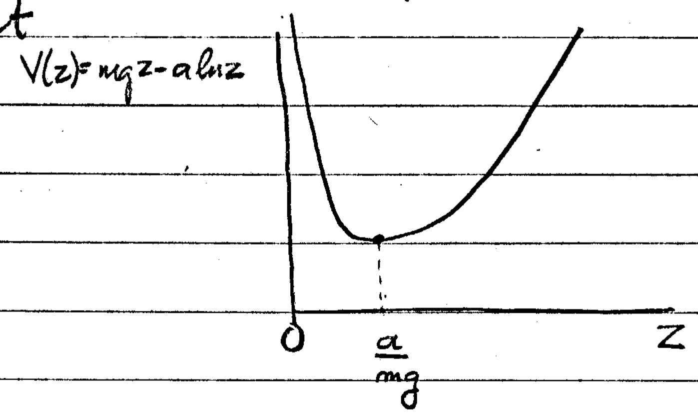
$$C^{-1} = \int_0^\infty z^{a\beta} e^{-mg\beta z} dz = \frac{(a\beta)!}{(mg\beta)^{a\beta+1}}.$$

Middelavstanden fra flata:

$$\langle z\rangle = \int_0^\infty z\,P(z)\,dz = C\int_0^\infty z^{1+a\beta}\,e^{-mg\beta z}\,dz$$

$$= C\,\frac{(1+a\beta)!}{(mg\beta)^{a\beta+2}} = \frac{(1+a\beta)!}{(a\beta)!\,(mg\beta)} = \frac{1+a\beta}{mg\beta} = \underline{\underline{\frac{a+kT}{mg}}},$$

økende med T som rimelig er når en ser på potensialet



<u>Oppgave 2</u>

Trykket er gitt ved $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$ og F ved

$$e^{-F/kT} = Z = \sum_n e^{-E_n/kT}.\quad \text{Dvs}$$

$$p = kT\frac{\partial}{\partial V}\ln\sum_n e^{-E_n/kT} = -\frac{\sum_n \frac{\partial E_n}{\partial V}e^{-E_n/kT}}{\sum_n e^{-E_n/kT}}.$$

I dette tilfellet er

$$\frac{\partial E_n}{\partial V} = C_n(-a)V^{-a-1} = -\frac{aE_n}{V},$$

dvs
$$p = \frac{a}{V}\,\frac{\sum_n E_n e^{-E_n/kT}}{\sum_n e^{-E_n/kT}} = a\,\frac{\langle E\rangle}{V} = a\frac{U}{V} = a\,u$$

$\underline{\underline{p/u = a}}$, For ikkerel. punktp.: $\underline{\underline{a = \frac{2}{3}}}$.

Oppgave 3

a) Sannsynligheten for å finne besettelsestallene $n_1, n_2, \ldots$ er

$$P(n_1, n_2 \ldots) = e^{(\Omega + \mu N - E)/kT} = e^{\beta(\Omega + \mu \sum_k n_k - \sum_k \epsilon_k n_k)}$$

$$= e^{\Omega\beta} \prod_k \left[e^{(\mu - \epsilon_k)\beta}\right]^{n_k}$$

$$= \left[e^{(\mu - \epsilon_i)\beta}\right]^{n_i} \cdot f \quad , \quad f = \text{uavh. av } n_i$$

$$P(n_i) = \sum_{n_k (\neq n_i)} P(n_1, n_2 \ldots) = C\left[e^{(\mu - \epsilon_i)\beta}\right]^{n_i} = \frac{e^{(\mu - \epsilon_i)\beta n_i}}{1 + e^{(\mu - \epsilon_i)\beta}}$$

ved å bestemme normeringskonstanten C for fermioner ($n_i = 0$ eller 1). Gir

$$\langle n_i \rangle = \sum_{n_i = 0}^{1} n_i P(n_i) = P(1) = \frac{e^{(\mu - \epsilon_i)\beta}}{1 + e^{(\mu - \epsilon_i)\beta}} = \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)\beta} + 1}$$

$$U = \langle E \rangle = \left\langle \sum_i \epsilon_i n_i \right\rangle = \sum_i \frac{\epsilon_i}{e^{(\epsilon_i - \mu)\beta} + 1}$$

b) $$\rho = \frac{1}{V}\langle N \rangle = \frac{1}{V}\sum_i \langle n_i \rangle = \frac{1}{V}\sum_i \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)\beta} + 1}$$

$$\rightarrow 4\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} + 1}$$

$$U = \sum_i \frac{\epsilon_i}{e^{(\epsilon_i - \mu)\beta} + 1} \rightarrow 4\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2} d\epsilon}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} + 1}$$

Ved $T \to 0$:
$$\rho = 4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^{\mu}\epsilon^{1/2}\,d\epsilon = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\mu^{3/2}$$

$$U = \frac{8}{5}\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\mu^{5/2}\,V$$

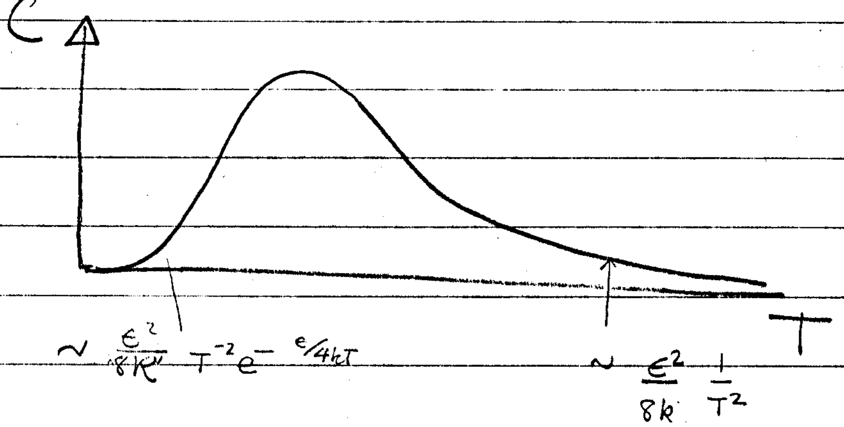
Midlere partikkelenergi: $\dfrac{U}{\langle N\rangle} = \dfrac{U}{V\rho} = \underline{\underline{\dfrac{3}{5}\mu}}$

c) $\epsilon_2 = \epsilon$, $\epsilon_1 = 0$
$$U = \langle E\rangle = \frac{\epsilon}{e^{(\epsilon-\mu)/kT}+1}$$

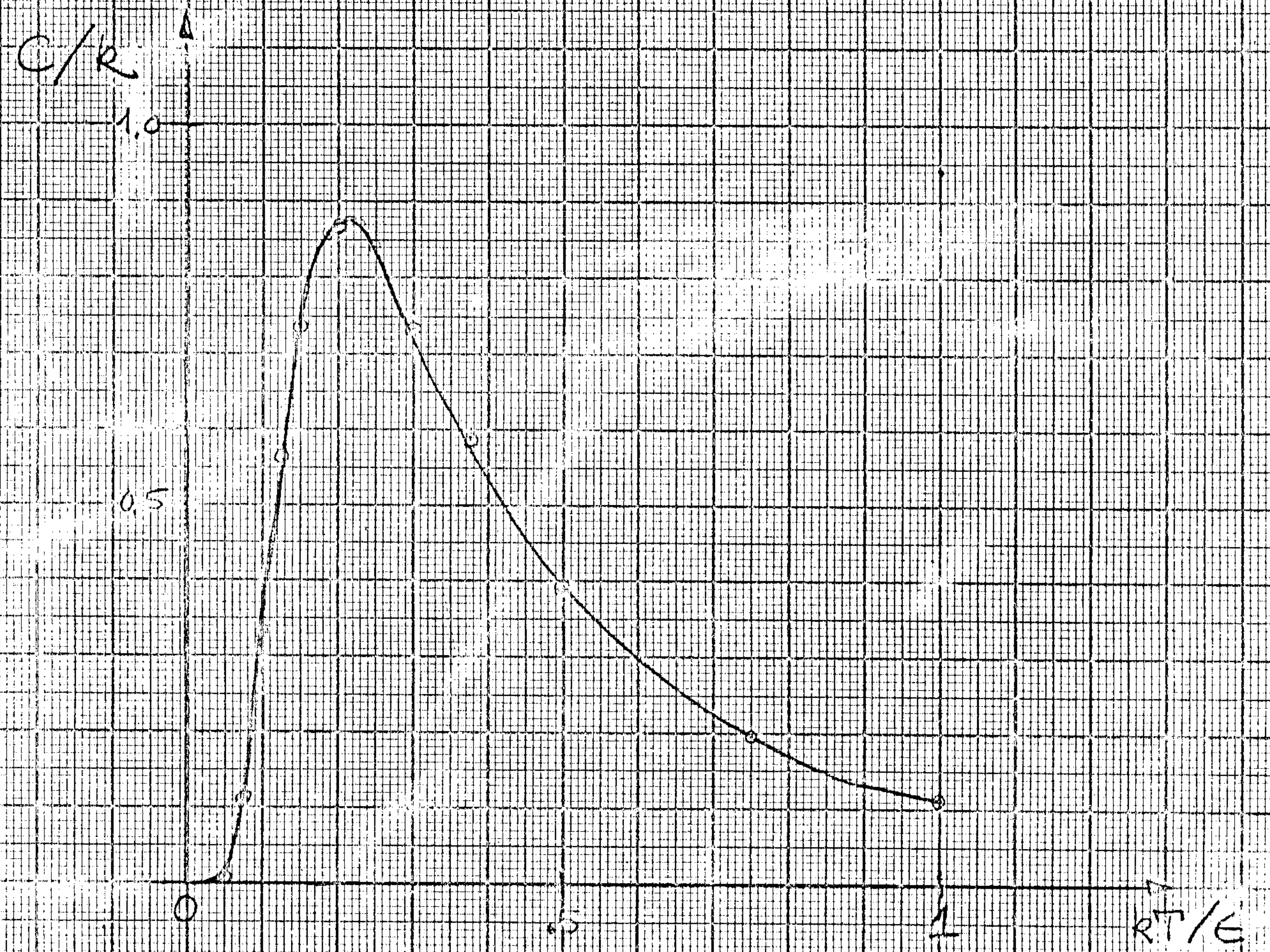
$$C = \frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T} = \frac{\epsilon\, e^{(\epsilon-\mu)/kT}}{\left(e^{(\epsilon-\mu)/kT}+1\right)^2}\,\frac{(\epsilon-\mu)}{kT^2}$$

$$= k\cdot\frac{\epsilon(\epsilon-\mu)}{4}\left[\frac{1}{kT\cosh\frac{\epsilon-\mu}{2kT}}\right]^2$$

$\mu = \frac{\epsilon}{2}$:
$$C = 2k\left[\frac{\epsilon/4kT}{\cosh(\epsilon/4kT)}\right]^2$$



Av de asymptotiske forløp ser vi at kurven må ha et maksimum. Presis figur neste side.



C/R
1,0
0,5
0
.5
1
RT/E

For $\mu > \epsilon$ ser vi at $C < 0$. Årsaken til dette, dvs. at middelenergien avtar med økende T, er at når T øker forsvinner partikler fra systemet til omgivelsene.

Alternativ formulering: Når $\mu > \epsilon$ er begge tilstander fullt besatt ved $T = 0$; dette gir den maksimalt mulige energi i systemet. Ved økende T kan energien bare avta, ⊃: $C < 0$.