Løsningsskisse

Oppgave 1

For N partikler med impulser $\vec{p}_1, \ldots \vec{p}_N$ og posisjoner $\vec{r}_1, \ldots \vec{r}_N$: Sannsynligheten for å finne systemet i faserromselementet $(dp\, dq) = \prod_{n=1}^{N} d^3p_n\, d^3r_n$ er $\mathcal{P}\,(dp\,dq)$, med

$$\mathcal{P} = \frac{1}{N!\,h^{3N}}\, e^{\beta[F - H(\vec{p},\vec{q})]},$$

med H = Hamiltonfunksjonen,
$\beta = 1/kT$,
k = Boltzmanns konstant
T = absolutt temperatur
F = den fri energi

*

Når en koordinat q (eller impulskoordinat) forekommer som et kvadratisk ledd i H : $H = \alpha q^2 + \ldots$ fås sannsynlighetsfordelingen av q lik

$$e^{-\alpha\beta q^2}\cdot \text{konstant} = \sqrt{\alpha\beta/\pi}\; e^{-\alpha\beta q^2}$$

ved normering, og middelverdien av det kvadratiske ledd blir

$$\langle \alpha q^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha q^2\, \sqrt{\alpha\beta/\pi}\; e^{-\alpha\beta q^2}\, dq = \frac{1}{2\beta} = \underline{\tfrac{1}{2}kT},$$

som er det klassiske ekvipartisjonsprinsipp.

*

Når partiklene er uavhengige faktoriseres sannsynlighetsfordelingen

$$\mathcal{P}(p,q) = \prod_{i=1}^{N} \mathcal{P}(\vec{p}_i, \vec{r}_i) = \prod_i \text{konst.}\, e^{-\beta\left[\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + V(r_i) - \vec{\mu}_i\cdot\vec{B}\right]}$$

1. Partikkeltettheten. Når vi bare er interessert i den romlige fordeling har vi

$$\mathcal{P}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots) = \text{konst}\cdot \prod_{i=1}^{N} e^{-\beta V(r_i)},$$

Sannsynlighetsfordelingen av én partikkel er

$$P(\vec{r}) = C \cdot e^{-\beta V(\vec{r})} = C \cdot e^{-\beta \frac{1}{3} c r^3}$$

Normering: $\quad C^{-1} = \int_0^\infty 4\pi r^2 e^{-\beta \frac{1}{3} c r^3} dr = \left[-\frac{4\pi}{\beta c} e^{-\beta \frac{1}{3} c r^3}\right]_0^\infty = \frac{4\pi}{\beta c}$,

dvs. $\quad \underline{P(\vec{r}) = \frac{\beta c}{4\pi} e^{-\beta \frac{1}{3} c r^3}}$

Med N partikler fås

$$\underline{\underline{\rho(\vec{r}) = N \frac{c}{4\pi kT} e^{-\frac{c}{3kT} r^3}}}$$

2. <u>Magnetisk moment</u>

Retningsfordelingen for et magnetisk moment $\vec{\mu}$ er

$$P(\vec{\mu}) = \text{konst} \cdot e^{+\beta \vec{\mu} \vec{B}} = \text{konst} \cdot e^{\beta \mu B \cos\vartheta}$$

Av symmetrigrunner er $\langle \vec{\mu} \rangle$ rettet langs $\vec{B}$, og størrelsen er

$$\langle \mu \cos\vartheta \rangle = \frac{\int_0^\pi \mu \cos\vartheta \, e^{\beta \mu B \cos\vartheta} d\Omega}{\int_0^\pi e^{\beta \mu B \cos\vartheta} d\Omega}, \quad d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

Med $\cos\vartheta = x$ fås

$$\langle \mu \cos\vartheta \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial B} \ln \int_{-1}^{+1} e^{\beta \mu B x} dx = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial B} \ln \frac{e^{\beta \mu B} - e^{-\beta \mu B}}{\beta \mu B}$$

$$= \mu \left[\frac{e^{\beta \mu B} + e^{-\beta \mu B}}{e^{\beta \mu B} - e^{-\beta \mu B}} - \frac{1}{B \beta \mu} \right]$$

Med. $\quad \xi \equiv \mu B / kT \quad$ fås for $\vec{M} = N \langle \vec{\mu} \rangle$:

$$\underline{\underline{M = N\mu \left[\operatorname{Coth} \xi - \xi^{-1} \right]}}$$

3. Varmekapasiteten

$$\langle \frac{\vec{p}^2}{2m} \rangle = 3 \cdot \frac{kT}{2} \quad \text{ved ekvipartisjonsprinsippet}$$

$$\langle V(r) \rangle = \int_0^\infty V(r) P(\vec{r}) d\vec{r} = \int_0^\infty \frac{1}{3} c r^3 \frac{\beta c}{4\pi} e^{-\beta \frac{1}{3} c r^3} d\vec{r}$$

$$= \frac{\beta c}{4\pi} \left(-\frac{\partial}{\partial \beta}\right) \int_0^\infty e^{-\beta \frac{1}{3} c r^3} d\vec{r} = \frac{\beta c}{4\pi} \left(-\frac{\partial}{\partial \beta}\right) \frac{4\pi}{\beta c}$$

$$= -\frac{1}{\beta} = kT$$

$$\langle \vec{\mu} \vec{B} \rangle = B \langle \mu \cos \vartheta \rangle = \mu B [\coth \xi - \xi^{-1}]$$

Middelenergi ved konstant B:

$$U = N \langle \frac{p^2}{2m} + V(r) - \vec{\mu}\vec{B} \rangle = N \left[\frac{5}{2} kT + \mu B (\coth \xi - \xi^{-1}) \right]$$

$$C_B = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_B = Nk \left[\frac{3}{2} + \left(\frac{\xi}{\sinh \xi}\right)^2 \right]$$

Oppgave 2

I det store kanoniske ensemble er sannsynligheten for et sett besettelsestall $n_1, n_2, \ldots$ gitt ved

$$w(n_1, n_2, \ldots) = \frac{\exp[(\sum_i \mu n_i - \sum_i \epsilon_i n_i)/kT]}{\sum_{n_i=0}^{\infty} \text{—''} \text{———}}$$

for bosoner $(n_i = 0, 1, 2, \ldots)$ da $w \sim e^{(\mu N - E)/kT}$ og $N = \sum_i n_i$ og $E = \sum_i \epsilon_i n_i$, ϵ_i = enpartikkelnivåer. Det gir

$$\langle n_k \rangle = \sum_{(n_i=0)}^{\infty} n_k w(n_1, n_2 \ldots) = \frac{\sum_{n_k=0}^{\infty} n_k e^{\frac{\mu-\epsilon_k}{kT} n_k}}{\sum_{n_k=0}^{\infty} e^{\frac{\mu-\epsilon_k}{kT} n_k}} = \frac{\frac{e^{(\mu-\epsilon_k)/kT}}{[1-e^{(\mu-\epsilon_k)/kT}]^2}}{\frac{1}{1-e^{(\mu-\epsilon_k)/kT}}}$$

$$= \frac{e^{(\mu-\epsilon_k)/kT}}{1-e^{(\mu-\epsilon_k)/kT}} = \frac{1}{e^{(\epsilon_k-\mu)/kT} - 1}, \quad \mu - \epsilon_k < 0 \text{ alle } k, \text{ dvs } \mu < 0$$

$$\langle (n_k - \langle n_k\rangle)^2\rangle = \langle n_k^2\rangle - \langle n_k\rangle^2 = \frac{1}{e^{(\epsilon_k-\mu)/kT}-1}\,.$$

For et stort system* har vi for partikkeltallet

$$\langle N\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\langle n_k\rangle \longrightarrow \int_0^{\infty} 2\pi\,(2m/\hbar^2)^{3/2}\,V\,\epsilon^{\frac{1}{2}}d\epsilon\cdot\frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT}-1}$$

$$= 2\pi V\left(\frac{2mkT}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{e^{x-\mu/kT}-1}$$

Den maksimale verdi av h.s. er for $\mu=0$, tilsvarende

$$\rho = \langle N\rangle/V = 2\pi\left(\frac{2mkT}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^{\infty}\frac{x^{1/2}}{e^x-1}dx = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\zeta\left(\tfrac{3}{2}\right)$$

For en gitt T er dette en maksimal tetthet, omvendt for gitt ρ er dette den minimal temperatur,

$$\underline{\underline{T_\lambda = \frac{h^2}{2\pi mk}\left[\frac{\rho}{\zeta(3/2)}\right]^{2/3}}}\,,$$

som synes mulig. Ved lavere T "kondenseres" partikler ut i grunntilstanden, og $\mu\approx 0$.

<u>Varmekapasiteten</u>

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V,$$

med $U = \sum_k \epsilon_k\langle n_k\rangle \longrightarrow \int_0^{\infty}2\pi\,(2m/\hbar^2)^{3/2}\,V\,\epsilon^{1/2}d\epsilon\,\frac{\epsilon}{e^{\frac{\epsilon-\mu}{kT}}-1}\,.$

idet partiklene i grunntilstanden har forsvinnende energi. For $T\le T_\lambda$ er $\mu=0$ som gir (med $\epsilon=kTx$)

$$U = 2\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}(kT)^{5/2}\int_0^{\infty}\frac{x^{3/2}dx}{e^x-1}$$

$$= \frac{3V}{2}\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2}(kT)^{5/2}\,\zeta(5/2),\quad \text{og}$$

$$\underline{\underline{C_V = \frac{15}{4}Vk\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\zeta(5/2)}}$$