UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR EKSPERIMENTALFYSIKK

EKSAMEN I FAG 715 15
STATISTISK MEKANIKK
(ved Lærarhøgskolen Statistisk mekanikk F 113)

Tysdag 10. desember 1985

kl. 0900 - 1500

Tillatne hjelpemiddel: Kalkulator
K. Rottmann: Matematische Formelsammlung
K.J. Knutsen: Formler og data i fysikk
O. Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken

Fagleg kontakt: K. Budal, tlf. 3455

Oppgåve 1

Ein gass av molekyl er i termisk likevekt ved temperaturen T. Farten til eit molekyl er $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$. Molekylmassen er m.

Finn ved enkle resonement uttrykk for følgjande storleikar:

a) $\langle v_x \rangle$

b) $\langle v_x^2 \rangle$

c) $\langle v^2 v_x \rangle$

d) $\langle v_x^2 v_y \rangle$

e) $\langle (v_x + bv_y)^2 \rangle$, b = konstant.

Ekvipartisjonsprinsippet skal reknast som kjent.

Oppgåve 2

Partisjonsfunksjonen Z til eit kanonisk system av partiklar, er

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

der $\beta = (kT)^{-1}$ og summasjonen er over alle tilstandane til systemet.

a) Vis at middelenergien $U = \langle H \rangle$ til systemet kan skrivast

$$\langle H \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

b) Finn $\langle H^2 \rangle$ uttrykt ved Z.

c) Finn energifluktuasjonen $\Delta U = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}$ til systemet. Vis at ΔU kan uttrykkast som ein funksjon av $\partial U/\partial \beta$.

d) Finn også ΔU uttrykt ved T, k og C_V, der C_V er varmekapasiteten til systemet.

e) Vi går ut frå at systemet er ein ideell, monoatomisk gass med i alt N atom.

Bruk resultatet frå c) til å finna den relative energifluktuasjonen $\Delta U/U$, uttrykt ved partikkeltalet N.

Vi reknar at ekvipartisjonsprinsippet er kjent.

Oppgåve 3

Ein ideell kvantegass av identiske partiklar i eit opent system er i termisk likevekt med eit partikkelreservoar. Sannsynligheten for at einpartikkeltilstanden k skal innehalda n_k partiklar, er

$$p(n_k) = \frac{e^{\beta(\mu-\varepsilon_k)n_k}}{\sum\limits_{n_k} e^{\beta(\mu-\varepsilon_k)n_k}}$$

der μ er det kjemiske potensialet og ε_k er einpartikkel-energien.

a) Finn det middels besettelsestalet $\langle n_k \rangle$ for i) fermionar og ii) bosonar.

b) Skisser funksjonen $\langle n_k \rangle$ som funksjon av storleiken $\beta(\varepsilon_k-\mu)$ for i) fermionar og ii) bosonar.

c) Finn eit uttrykk for partikkelfluktuasjonen

$$\Delta n_k = \sqrt{\langle n_k^2 \rangle - \langle n_k \rangle^2}$$

for i) fermionar og ii) bosonar.

d) Finn grenseverdien for den relative fluktuasjonen $\Delta n_k/\langle n_k \rangle$ når $\langle n_k \rangle$ går mot sin maksimalverdi for i) fermionar og ii) bosonar.

Vi ser nå på ein ideell bosongass i eit opent system som berre har to einpartikkeltilstandar med einpartikkelenergiane $\varepsilon_1 = 0$ og $\varepsilon_2 = \varepsilon$, respektivt.

e) Kva er sannsynligheten for at systemet skal innehalda N partiklar og at alle partiklane er i den eksiterte tilstanden?

f) Ved kva temperatur T vil det vera dobbelt så mange partiklar i grunntilstanden som i den eksiterte tilstanden? Vi reknar at det middels partikkeltalet $\langle N \rangle$ i systemet er mykje større enn 1. Gjer rimelege tilnærmingar. Uttrykk T ved $\langle N \rangle$ og ε .