UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HÖGSKOLE
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Prof. E. H. Hauge
Tlf. 3651

EKSAMEN I FAG 71515 STATISTISK MEKANIKK
Ved AVH: F113 STATISTISK MEKANIKK
Tirsdag 8.12.1987
kl.0900–1500

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Godkjent lommekalkulator.

NB: Alle de 12 underpunktene teller i utgangspunktet likt. Mange punkter kan besvares selv om de foregående punktene ikke er besvart.

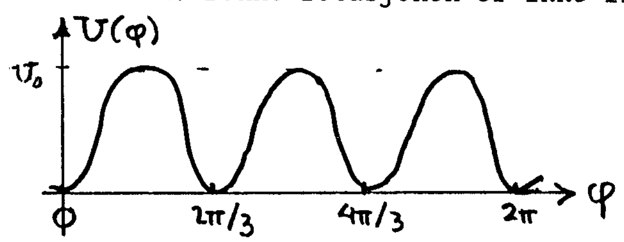
Oppgave 1

a. Formuler og bevis det klassiske ekvipartisjonsprinsippet.

b. En en-dimensjonal harmonisk oscillator har ikke-degenererte energitilstander med energiegenverdier $\epsilon_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ [n=0,1,2,...]. Skisser, uten beregninger, bidraget $c_o(T)$ fra en slik oscillator til systemets varmekapasitet. Hvordan oppförer $c_o(T)$ seg kvalitativt for lave T ? Hva betyr "lave T" her ? Hva er $c_o(T)$'s grenseverdi når $T \to \infty$?

c. Beregn deretter $c_o(T)$ kvantitativt og sjekk det funne uttrykket mot de kvalitative utsagnene under pkt. b.

d. En av de interne bevegelsesformene i etanmolekylet (C_2H_6) er rotasjon av den ene metylgruppen (CH_3) relativt den andre, langs C–C aksen. Denne rotasjonen er ikke fri, men foregår i et potensial



som skissert i figuren. De parabolske bunnene i potensialet gir i harmonisk tilnærmelse $\hbar\omega \approx 0.03$eV , mens $U_0 \approx 0.14$ eV . Skisser

<u>kvalitativt</u> bidraget, $c(T)$, til $C_V(T)$ fra denne frihetsgraden.

Hvordan er oppförselen for lave T ? For höye T ?
Hva betyr lave og höye T i denne forbindelsen ?

Oppgitt: $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} J/K$; $1eV = 1.6 \cdot 10^{-19} J$; $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\pi/\alpha}$.

<u>Oppgave 2</u>

<u>a</u>. Forklar kvalitativt hvorfor et ideelt fermisystem er "nær T=0" dersom $T \ll T_F$, der fermitemperaturen, T_F, er fermienergien, μ_0, dividert med Boltzmanns konstant, k_B .

b. En typisk nöytronstjerne består hovedsakelig av nöytroner med en tetthet av störrelsesorden $\rho \sim 10^{44} m^{-3}$. Temperaturen er av störrelsesorden $T \sim 10^8 K$. Anta at nöytronstjernen i rimelig tilnærmelse kan oppfattes som et ideelt fermisystem. Er nöytronstjerner "kalde", i betydningen $T \ll T_F$?

Oppgitt:

$$\rho = \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1} = 2\pi g_s \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty d\epsilon \, \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}$$

$h = 6.63 \cdot 10^{-34} J \cdot s$; $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K ; $m_n \approx m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg ; $g_s = 2$.

<u>Oppgave 3</u>

Entropien til et kvantemekanisk N-partikkelsystem kan skrives som

$$S = -k_B \sum_n p_n \ell n \, p_n$$

der p_n er sannsynligheten for at systemet befinner seg i N-partikkel tilstanden Ψ_n .

<u>a</u>. Vis at dersom grunntilstanden har degenerasjonsgraden g , er entropien ved $T=0$ gitt som

$$S(T=0) = k_B \ell n \, g \; .$$

<u>b</u>. Et spinnsystem på et kubisk gitter er karakterisert ved Hamiltonfunksjonen $(\sigma_i = \pm 1)$

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i$$

der förste sum går over alle nærmeste nabopar, og andre sum går over alle spinn. Bestem entropien pr. spinn ved $T=0$ når

(i) $J=0$, $h=0$ (ii) $J=0$, $h>0$ (iii) $J>0$, $h=0$
(iv) $J<0$, $h=0$ (v) $J>0$, $h<0$ (vi) $J<0$, $h>0$.

Oppgave 4

For et endimensjonalt spinnsystem med N spinn, $\sigma_i=\pm 1$, med nærmeste nabokopling J og ytre felt (i passende enheter) h_i på spinn nr. i , er partisjonsfunksjonen

$$Z_N(T,h_1,h_2\ldots h_N) = \sum_{\{\sigma\}} \exp\left\{\beta J \sum_{i=2}^{N} \sigma_{i-1}\sigma_i + \beta \sum_{i=1}^{N} h_i\sigma_i\right\} \qquad (1)$$

a. Bestem $Z_N(T,h)$ og magnetiseringen $m=\langle\sigma_i\rangle$ når vekselvirkningen neglisjeres ($J=0$) og feltet er uniformt, $h_i=h$.

b. Innför det nye variabelsettet

$$\left\{\sigma_1,\ldots \sigma_N\right\} \to \left\{\sigma_1,\tau_2,\ \ldots\ \tau_N\right\} \equiv \left\{\sigma_1,\ \sigma_1\sigma_2,\sigma_2\sigma_3,\ldots\ \sigma_{N-1}\sigma_N\right\}$$

og vis at med $J\neq 0$ og inhomogent felt kan (1) skrives

$$Z_N(T,h_1,\ldots h_N) = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \sum_{\{\tau\}} \exp\left\{\beta J \sum_{i=2}^{N} \tau_i + \beta \sum_{i=1}^{N} h_i\sigma_1\tau_2\tau_3\cdots\tau_i\right\} \qquad (2)$$

*

Vi skal bruke formen (2) til å se på det fysisk interessante tilfellet med et endelig "overflatefelt", $h_1\neq 0$, men med null felt på de övrige spinnene i kjeden ($h_i=0$, $i>1$).

c Vis generelt fra (1) at

$$m_n = \langle\sigma_n\rangle = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial h_n} \ln Z_N(T,h_1,\ldots h_N)$$

og bruk så formen (2) til å beregne m_n for det spesielle tilfellet $h_1\neq 0$; $h_i=0$, $i>1$.

d. Skisser m_n som funksjon av n for tilfellet $\{h\}=\{h_1,0,0,\ldots\}$, enten basert på direkte fysisk innsikt, eller basert på eksplisitte resultater under punkt c. Hvor langt inn i kjeden vil overflatefeltet h_1 ha betydelig innflytelse på m_n ? Hvordan vil denne "inntrengningsdybden" (=korrelasjonslengden) avhenge av temperaturen?