Løsninger

Oppg. 1

a) Siden $\text{curl}\,\vec{B}(\vec{r}) = \vec{0}$ utenfor V følger

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\,\text{grad}\,\chi(\vec{r}).$$

$$M_{1m} = -\frac{1}{2}\int_V d^3r'\; r'\, Y^*_{1m}(\Omega')\,\text{div}\left[\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')\right]$$

$$\underset{\text{part. int.}}{=} \frac{1}{2}\int_V d^3r'\left[\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')\right]\cdot\nabla\left(r'\,Y^*_{1m}(\Omega')\right)$$

der overflateleddet forsvinner.

Ved å bruke tabellen på kompendiets side 55 finnes

$$M_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,(m_x - i m_y)\;;\quad M_{1-1} = +\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,(m_x + i m_y)$$

$$M_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,m_z$$

der

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_V d^3r'\;\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')$$

b) En finner

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi R^2}\,\omega R\;\delta(r-R)\sin\vartheta\;\vec{e}_\varphi$$

der Q er kuleflatens totale ladning, R er dens radius og $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z$ er vinkelhastigheten.

Enhetsvektoren $\vec{e}_\varphi$ er

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y .$$

Med $\vec{r}\times\vec{e}_\varphi = r\,\vec{e}_r\times\vec{e}_\varphi$

$$= r\left\{-\cos\vartheta\cos\varphi\,\vec{e}_x - \cos\vartheta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \sin\vartheta\,\vec{e}_z\right\}$$

fås

$$\vec{m} = \frac{Q\omega R^2}{4}\int_{-1}^{+1} d(\cos\vartheta)\left(1-\cos^2\vartheta\right)\vec{e}_z$$

$$= \frac{QR^2\vec{\omega}}{3}$$

c) Det er opplagt at $M_{\ell m} = \delta_{\ell 1}\,\bar{M}_m$. Følgelig

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\frac{\mu_0}{3}\sum_{m=-1}^{+1} M_{1m}\,Y_{1m}(\Omega)\,\frac{1}{r^2}$$

$$= -\frac{\mu_0}{3}\operatorname{grad}\left\{\frac{3}{8\pi}(m_x - i m_y)\,\frac{x+iy}{r^3} + \frac{3}{8\pi}(m_x + i m_y)\,\frac{x-iy}{r^3} + \frac{3}{4\pi}\,m_z\,z\right\}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\,\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$$

dvs et rent dipolfelt.

Oppgave 2

a) div $\vec{E} = -\frac{\delta}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^{3+\delta}}$

og

curl $\vec{E} = \vec{0}$. Herav følger at $\vec{E}$ er et potensialfelt.

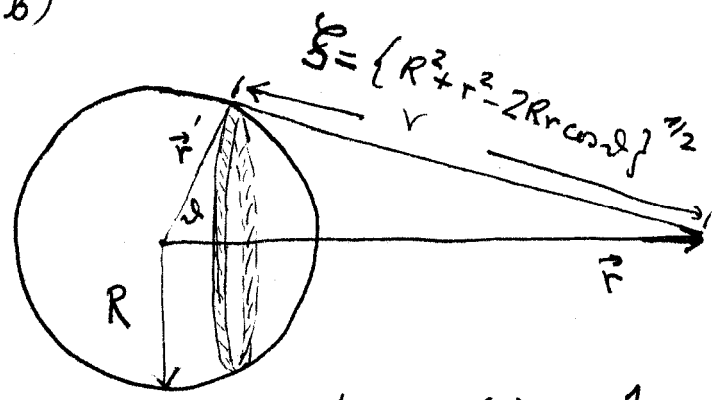
Man finner

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$

eller

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(1+\delta)r^{1+\delta}}$$

b)



$$4\pi\varepsilon_0\,\varphi_R(r) = \frac{1}{1+\delta}\int_{|\vec{r}'|=R}\frac{\sigma\,dF}{|\vec{r}-\vec{r}'|^{1+\delta}}$$

der $\quad dF = 2\pi R^2\sin\vartheta\,d\vartheta$,

dvs

$$4\pi\varepsilon_0\,\varphi_R(r) = \frac{2\pi\sigma R^2}{1+\delta}\int_0^{\pi}\frac{\sin\vartheta\,d\vartheta}{\{R^2+r^2-2Rr\cos\vartheta\}^{\frac{1+\delta}{2}}}$$

Med $\xi^2 = R^2+r^2-2Rr\cos\vartheta$

eller $\xi\,d\xi = Rr\sin\vartheta\,d\vartheta$ fås

$$4\pi\varepsilon_0 \varphi_R(r) = \frac{2\pi\sigma R}{(1-\delta^2)r}\left[\xi^{1-\delta}\right]_{x_1}^{x_2}$$

der integrasjonsgrensene er $x_2 = R+r$ og

$$\begin{cases} x_1 = R-r & \text{for } r<R \\ x_1 = r-R & \text{for } r>R \end{cases}$$

Ved å skrive $\xi^{1-\delta} = \xi\, e^{-\delta \ln \xi}$ og utvikling finnes de oppgitte resultatene.

c) Når de ledende kuleflater forbindes ved en tråd får de det samme potensial. Den indre kuleflatens potential φ_i er

$$\varphi_i = \varphi_a(a) + \varphi_b(a)$$

Den ytre kuleflatens potensial φ_y er

$$\varphi_y = \varphi_a(b) + \varphi_b(b)$$

Ved å sette $\varphi_i = \varphi_y$ fås

$$q_b = \frac{qa}{a-b}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(a+b)^{a+b}}{(a-b)^{a-b}} - b\ln 2a\right]\delta + O(\delta^2)$$

Måling av q_b gir test av Coulombs lov (Cavendishs eksperiment).

Oppgave 3

Bevegelseslikning $\ddot{\vec{r}} + \Gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e_0}{m}\vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}$

Løsning $\vec{r} = \frac{\vec{P}}{Ne_0} = \frac{e_0}{m}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)-i\omega\Gamma}\vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}$

Med

$$\vec{P}(\omega) = \varepsilon_0\{n^2(\omega)-1\}\vec{E}(\omega) \simeq 2\varepsilon_0\{n(\omega)-1\}\vec{E}(\omega)$$

fås

$$n(\omega) \approx 1 + \frac{a}{(\omega_0^2-\omega^2)-i\omega\Gamma}$$

med $a = \frac{Ne_0^2}{2\varepsilon_0 m}$

i) $n(\omega)$ har poler for $\omega = -i\frac{\Gamma}{2} \pm \alpha$

der $\alpha = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2/4}$, dvs $n(\omega)$ er analytisk for $\mathrm{Im}\,\omega \geq 0$

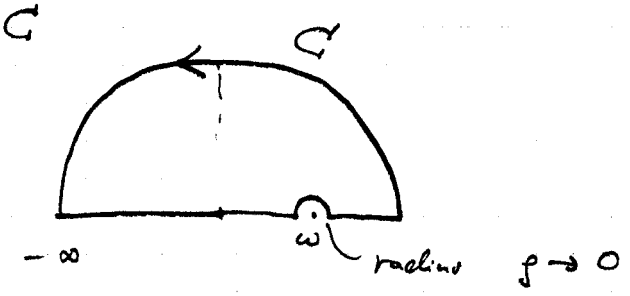
ii) $n(\omega) \to 1$ for $\omega \to \infty$

iii) $n^*(-\omega) = n(\omega)$

Egenskapene i) + ii) gir dispersjonsrelasjonen

$$n(\omega) - 1 = \frac{1}{i\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n(\nu)-1}{\nu-\omega}d\nu$$

ved å integrere den analytiske funksjon $\frac{\varepsilon(\nu)-1}{\nu-\omega}$ over integrasjonsvegen C



Derfra følger

$$\mathrm{Re}\, n(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \; \frac{\mathrm{Im}\, n(\nu)}{\nu - \omega}$$

og u.h.a. iii), dvs $\mathrm{Im}\, n(-\omega) = -\mathrm{Im}\, n(\omega)$:

$$\mathrm{Re}\, n(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} P \int_{0}^{\infty} d\nu \; \frac{\nu\, \mathrm{Im}\, n(\nu)}{\nu^2 - \omega^2}$$