Eksamen i

fag 71516 ELEKTROMAGNETISK TEORI

Torsdag 12. juni 1980

kl. 0900 - 1500

Tillatte hjelpemidler: Forelesningsreferater samt øvingsoppgaver med løsninger våren 1980. Matematisk formelsamling. Regnestav. Kalkulator.

Oppgave 1.

Et elektron skytes med hastigheten $v_0 (<<c)$ inn i et område med konstant elektrisk felt, rettet slik at elektronet får en konstant akselerasjon a_0 rettet mot den opprinnelige bevegelsesretningen. Elektronets bane kan beskrives slik:

$$x(t) = y(t) = 0 ,$$

$$z(t) = \begin{cases} -v_0(t+T_1) & , \quad t<-T_1 \quad , \\ \frac{1}{2}a_0(t^2-T_1^2) & , \quad -T_1<t<T_1 \quad , \\ v_0(t-T_1) & , \quad t>T_1 \quad , \end{cases}$$

der $2T_1$ er den tiden elektronet tilbringer inne i "felt-området". (Hastighetsendringen er $2v_0 = 2T_1 a_0$) .

a) Finn elektronets hastighet og akselerasjon som funksjoner av tiden, og skriv opp en formel for utstrålt energi pr. tids- og romvinkelenhet, som funksjon av tiden og vinkelen θ mellom z-aksen og den retningen $(\hat{n})$ vi betrakter. (Formelen skal ikke utledes. Det er nok å angi under hvilke betingelser den gjelder).

b) Finn total utstrålt energi W_s i løpet av hele prosessen. Forholdet mellom W_s og elektronets opprinnelige kinetiske energi W_0 kan skrives på formen τ/T_1 , der τ har dimensjon tid. Finn τ i sekunder når det oppgis at $r_0 \equiv e^2/(4\pi\varepsilon_0 mc^2) \simeq 2.8\cdot 10^{-15}$m . Finn tallverdier for tiden T_1, forholdet W_s/W_0 og hvor langt inn i feltområdet elektronet beveger seg, dersom $v_0 = 0.01c$ og feltstyrken er 1V/cm .
(Oppgitt: $mc^2 = 0.5$ MeV)

c) Strålingen fra denne prosessen vil være fordelt på forskjellige frekvenser. Angi, uten regning, et estimat av størrelsesorden av det intervall $\Delta\omega$ som inneholder de vesentligste frekvensene. På hvilken måte avhenger strålingstapet W_s av T_1 for fastholdt v_0? Hvordan avhenger W_s og $\Delta\omega$ av v_0 for fastholdt a_0 ? Hvordan må da frekvensfordelingen $U(\omega)$ innenfor intervallet $\Delta\omega$ avhenge av v_0 for fastholdt a_0 ?

d) Frekvensfordelingen av utstrålt energi pr. romvinkelenhet fra en punktpartikkel er generelt gitt av formelen

$$U(\hat{n},\omega) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{1}{4\pi^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}(t')-\omega t')}(\vec{k}\times\vec{v}(t'))dt'\right|^2 ,$$

der $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\hat{n}$. Denne formelen forutsetter egentlig at partikkelen beveger seg innenfor et begrenset område. For å bringe eksemplet ovenfor i overensstemmelse med dette kravet tar vi med en "konvergensfaktor" $e^{-\varepsilon|t'|}$ på hastigheten for store $|t'|$. (ε positiv, men vilkårlig liten). Finn $U(\hat{n},\omega)$ for $\theta = 90^0$.

e) Lag en rask skisse av den funne $U(\hat{n},\omega)$ som funksjon av ω . Hvordan harmonerer resultatet med estimatet i pkt.c? Integrer den funne $U(\hat{n},\omega)$ over alle frekvenser, og påvis at resultatet harmonerer med formelen under pkt.a).

Oppgitt: $\int_0^{\infty} dx\,\frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{\pi}{2}$.

Oppgave 2

a) En partikkel med masse m og positiv ladning q beveger seg med hastighet $\vec{v}(t)$ loddrett på et homogent magnetfelt med induksjon $\vec{B}$ rettet langs z-aksen. Banen blir en sirkel,

$$\vec{r}(t) = R(\hat{e}_x\cos\omega_0 t-\hat{e}_y\sin\omega_0 t)$$

(origo er plassert i sentrum). Finn R og ω_0 , når $v<<c$. Strålingsfeltet fra denne partikkelen observeres i stor avstand i retning θ i forhold til z-aksen. Hvilken type polarisasjon har strålingen for $\theta = \pi/2$, og for $\theta = 0$?

b) (Punktene b), c) og d) har ingen forbindelse med punkt a)) . Når en antenne er plassert i nærheten av en leder, vil denne reflektere den direkte bølgen fra antennen, slik at strålingsfeltet i stor avstand er vektorsummen av den direkte og den reflekterte bølgen. Et eksempel på en slik leder er jorden (bakken), som her antas å være plan (horisontal), med uendelig stor ledningsevne. Den reflekterte bølgen kan oppfattes som generert av induserte ladninger og strømmer i denne overflaten. En måte å finne virkningen av disse på er ved speiling. Bruk speilingsprinsippet for en ladning i bevegelse til å argumentere for at en strøm i en horisontal antenne skal ha en "speilstrøm" i <u>motsatt</u> retning (dvs. antiparallelle strømmer), og at en strøm i en vertikal antenne skal ha en "speilstrøm" som beveger seg i <u>samme</u> retning.

c) En ladningsfordeling som oscillerer med frekvens ω , har utstrekning $d \ll \lambda = 2\pi c/\omega$ og dipolmoment $\vec{p}_1(t) = \vec{p}_0 \cos\omega t$, der $\vec{p}_0$ er vertikal. Fordelingen er plassert i en høyde h over bakken $(d \ll h)$. Angi dipolmomentet $\vec{p}_2(t)$ (og plasseringen) for fordelingen av speilladninger. Finn et uttrykk for strålingsfeltet $\vec{E}_s$ i stor avstand $(\gg h)$ fra fordelingene, uttrykt bl.a. ved vinkelen θ mellom observasjonsretningen og normalen til planet.

d) Anta $h = \lambda/2$. For hvilke verdier av θ er energistrømmen pr. romvinkelenhet $U(\hat{n},t)$ da lik null, og for hvilken θ har $U(\hat{n},t)$ sin maksimale verdi U_{max} ? Lag en rask skisse av $U(\hat{n},t)/U_{max}$ som funksjon av θ .

Anta deretter at $\vec{p}_0$ er horisontal og at bølgelengden λ er 200m. Hvor stor må da h minst være for å gi maksimal $U(\hat{n},t)$ i vertikalretningen?