Eksamen i
Fag 71516 Elektromagnetisk Teori

Mandag 15.juni 1981
kl.0900-1400

Tillatte hjelpemidler: K.Rottmann: Mathematische Formelsammlung, regnestav/lommekalkulator.

Oppgave 1

a) Vis at dersom der foreligger rotasjonssymmetri om z-aksen, så kan den generelle løsning av Laplaces ligning utvikles etter kulefunksjonene slik

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{A_\ell}{r^{\ell+1}} + B_\ell \, r^\ell\right) P_\ell(\cos\theta) \quad .$$

b) Bruk dette resultatet til å finne potensialet utenfor en ledende kule med radius a og ladning q som anbringes i et opprinnelig homogent elektrostatisk felt av meget stor utstrekning.

c) Bestem ladningstettheten på kulens overflate.

d) Kulen blir nå delt av et plan gjennom sentrum og loddrett på det elektrostatiske felt. Beregn den kraften som må til for å holde de to halvkulene sammen.

Oppgitt:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \quad .$$

$P_0(\cos\theta) = 1$

$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$

.

.

.

Oppgave 2

Vi skal undersøke utstrålingen fra en sfærisk symmetrisk ladningsfordeling der ladningene kun oscillerer radiellt.

a) Benytt symmetribetraktninger til å vise at vektorpotensialet må være av formen

$$\vec{A}(\vec{r},t) = f(|\vec{r}|,t)\vec{r} \ .$$

b) Beregn den magnetiske induksjon.

c) Hva blir følgelig energiutstrømningen per flateenhet i et vilkårlig valgt punkt utenfor ladningsfordelingen?

Oppgave 3

La de retarderte løsninger av Maxwells ligninger i Lorentz gauge være gitt:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}\left(\vec{r},t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3r'$$

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho\left(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3r' \quad .$$

a) Vis at i store avstander fra ladningene (d.v.s. i bølgesonen) er

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \times \vec{n} \quad \text{og} \quad \vec{E} = c\vec{B}\times\vec{n} \quad ,$$

der $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ er strålingens retning.

Vi skal nå undersøke utstrålingen fra en elektrisk dipol med dipolmoment $\vec{d}$ som roterer i x-y planet ned konstant vinkelhastighet $\omega=\omega_z$.
La dipolens lengde være $\vec{\ell}$ slik at $\vec{d}=q\vec{\ell}$.

b) Vis at vi for $r \gg \ell$ har

$$\int \vec{j}\left(\vec{r}\,',t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right) d^3r' = \frac{d}{dt}\int \vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c})\, d^3\vec{r}\,' = \dot{\vec{d}} \ .$$

Anta $\omega\ell \ll c$ og bruk $\int j_k d^3r = \int \frac{\partial x_k}{\partial x_\ell} j_\ell d^3r$.

c) Finn strålingsfeltet i store avstander fra dipolen.

d) Vis at det samme strålingsfelt kan frembringes fra to lineært oscillerende dipoler som står loddrett på hverandre. Bestem disse dipolers amplitude og faseforholdet mellom dem.

e) Beregn energiutstrømningen per tidsenhet fra den roterende dipolen og sammenlign dette med energiutstrømningen fra en lineært oscillerende dipol med samme frekvens og amplitude.