

Fagleg kontakt under eksamen:  
Navn: Kjell Budal  
Tlf.: 3455 .

EKSAMEN I FAG 715 16  
ELEKTROMAGNETISK TEORI

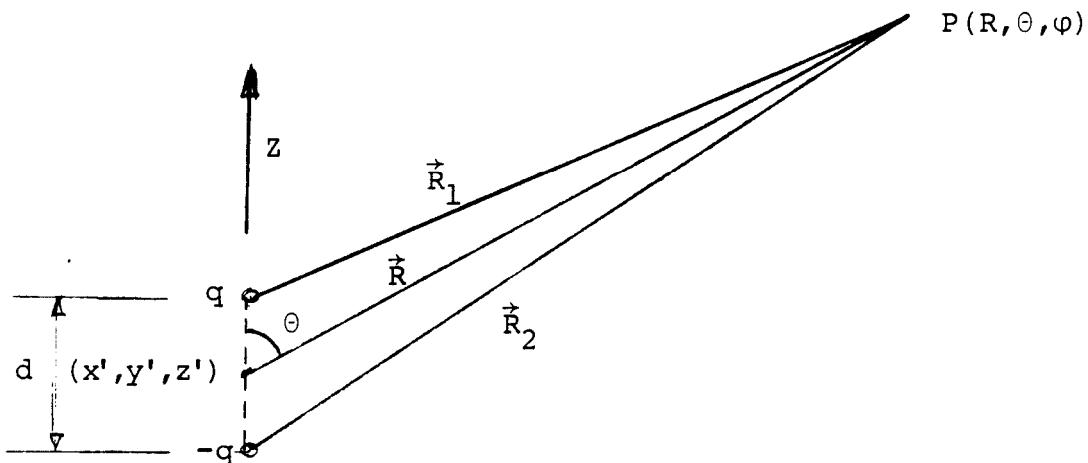
Torsdag 15. mai 1986

kl. 0900 - 1500

Tillatte hjelpeemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung  
Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken  
Godkjent lommekalkulator

---

Oppgåve 1



To ladde punktpartiklar med ladningene  $q$  og  $-q$ , respektivt, er plasserte i avstanden  $d$  fra hverandre. Vi søker det elektriske potensialet  $\phi$  i punktet  $P(R, \theta, \varphi)$  som er så langt ute at  $R \gg d$ .

- a) Vis at eit tilnærma uttrykk for potensialet  $\phi$  i  $P$  (korrekt til  $O(R^{-2})$  , er

$$\phi \approx \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \quad (1)$$

der  $\vec{p}$  er dipolmomentet til ladningskonfigurasjonen.

- b) Vis ved å utføra operasjonen  $\vec{E} = -\nabla\phi$  på (1), at den elektriske feltstyrken i  $P$  kan skrivast

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^5} [3(\vec{p} \cdot \vec{R}) \vec{R} - R^2 \vec{p}] \quad (2)$$

- c) Finn vha. (2) feltkomponentane  $E_R$ ,  $E_\theta$  og  $E_\varphi$  i  $P$ .

Dipolen blir plassert med symmetrisenteret i posisjonen  $(x', y', z')$  i ein gitt stasjonær, ytre feltstyrke  $\vec{E}_0(x', y', z')$ .

- d) Utlei ein formel for den potensielle energien til dipolen uttrykt ved  $\vec{p}$  og  $\vec{E}_0$ .
- e) Vis at krafta som det ytrefeltet øver på dipolen kan skrivast

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla') \vec{E}_0 \quad (3)$$

Her tyder  $\nabla'$  at operasjonen skal utførast med dei merka koordinatane.

Det ytre feltet  $\vec{E}_0$  blir etablert ved at ein punktpartikkkel med ladning  $q_0$  blir plassert i punktet  $P(R, \theta, \phi)$ , der  $R \gg d$  (sjå figuren).

- f) Finn vha. (3) krafta  $\vec{F}$  som ladninga  $q_0$  øver på dipolen.
- g) Finn også krafta  $\vec{F}'$  (på komponentform) som dipolen øver på ladninga  $q_0$  ved å bruka resultatet frå pkt. c).

Dersom du finn det tilsynelatande paradokset at  $\vec{F}' \neq -\vec{F}$ , forklar kvifor.

### Oppgåve 2

Den elektriske feltstyrken generert av ein partikkkel med ladning  $q$ , fart  $\vec{u}$  og akselerasjon  $\vec{u}$ , er gitt ved

$$\vec{E} = \vec{E}_u + \vec{E}_a$$

der

$$\vec{E}_u = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{s^3} \left( \vec{R} - \frac{\vec{R}\vec{u}}{c} \right) \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)$$

og

$$\vec{E}_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{c^2 s^3} \left[ \vec{R} \times \left( \left( \vec{R} - \frac{\vec{R}\vec{u}}{c} \right) \times \dot{\vec{u}} \right) \right]$$

### Storleiken

$$s = R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{u}}{c} = R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}$$

Den magnetiske flukstettheten kan skrivast

$$\vec{B} = \frac{\vec{R} \times \vec{E}}{Rc}$$

Kandidaten må sjølv tolka likningane ovafor og dei udefinerte storleikane som inngår i likningane.

- a) Argumenter for at det berre er feltkomponentane  $\vec{E}_a$  og  $\vec{B}_a$  som bidrar til den utstrålte effekten.

Kva retning har  $\vec{E}_a$  i forhold til  $\vec{R}$ ?

Vi skal i resten av denne oppgåva studera ladde partiklar med akselerasjon  $\dot{u}$  og med ein fart som er mykje mindre enn lysfarten:  $u \ll c$ .

- b) Finn ein generell formel for den totale utstrålte effekten til ein slik partikkkel, uttrykt ved ladninga  $q$  og akselerasjonen  $\dot{u}$ .

Ein punktpartikkkel med ladning  $q$  oscillerer omkring eit likevektspunkt med utsvinget

$$z = z_0 \sin \omega_1 t ,$$

der  $z_0$  er utsvingsamplituden. Vi reknar at  $z_0 \ll \lambda$ , der  $\lambda$  er bølgjelengda til den genererte strålinga.

- c) Finn eit tilnærma uttrykk for feltkomponenten  $\vec{E}_a$  i posisjonen  $\vec{r}$  relativt likevektspunktet, ved tidspunktet  $t$  :  
 $\vec{E}_a = \vec{E}_a(\vec{r}, t)$ . Vi reknar at  $r \gg z_0$ .
- d) Finn tidsmiddelverdien  $\bar{P}_1$  av den totale utstrålte effekten til partikkelen.

Ein partikkkel med ladning  $q$  går i ein sirkelbane med radius  $a$ , med konstant vinkelfrekvens  $\omega_2$ . Vi reknar at  $a \ll \lambda$ , der  $\lambda$  er bølgjelengda til den genererte strålinga.

- e) Finn den totale utstrålte effekten  $P_2$  til partikkelen.
- f) Kva er forholdet  $\alpha = P_2/\bar{P}_1$  når  $a = z_0$  og  $\omega_1 = \omega_2$ . Prøv å grunngje at resultatet er rimeleg.
- g) Partikkelen har masse  $m$  og kinetisk energi  $E_k$ . Kva er forholdet  $\gamma$  mellom utstrålt energi per omløp og  $E_k$ . Kor stort blir dette forholdet for eit "klassisk" elektron i den inste banen i eit hydrogenatom, der  $a = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  og  $E_k = 13,6 \text{ eV}$ .