Universitetet i Trondheim
Norges Tekniske Høgskole
Institutt for teoretisk fysikk

Eksamen i
Teoretisk fysikk IIIA
Onsdag 12.desember 1973
Kl. 09.00 - 16.00

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Oppgave 1.

Gitt Lagrangetettheten

$$L = f_1 L_D + f_2 L_K + f_3 L_I \quad ,$$

der

$$L_D = \bar{\psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) \ ,$$

$$L_K = \tfrac{1}{2}(\partial_\mu \varphi(x)\partial^\mu \varphi(x) - M^2\varphi^2(x)) \quad ,$$

$$L_I = \bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\varphi(x) \quad ,$$

der f_1 , f_2 , f_3 er valgbare konstanter, $\psi(x)$ er en Dirac spinor, $\varphi(x)$ et skalarfelt (egentlig pseudo-skalar).

1. Finn bevegelseslikningene for feltene $\psi(x)$ og $\varphi(x)$, når $f_1 = f_2 = 1$.
2. Finn de generaliserte impulser for feltene $\psi_\alpha(x)$ og $\varphi(x)$ når $f_1 = f_2 = 1$.

Sett nå $f_2 = f_3 = 0$.

3. Vis at Hamiltontettheten $\mathcal{H}$ for det frie Dirac-feltet kan skrives

$$\mathcal{H}(x) = \psi^\dagger(x) i\partial_0 \psi(x) \quad .$$

*

Anta nå at det frie Dirac-feltet er kvantisert. Vi betrakter Fourierutviklingen av feltet.

4. Hva betyr $:\mathcal{H}(x):$? Hvorfor er dette symbolet innført?

5. Vis at $H_D = \int :\mathcal{H}(x): d^3x$ kan skrives

$$H_D = \sum_s \int E(k)\left(b^\dagger(\vec{k},s)b(\vec{k},s)+d^\dagger(\vec{k},s)d(\vec{k},s)\right)d^3k \quad .$$

6) La $|0\rangle$ betegne vakum-tilstanden slik at $b(\vec{k},s)|0\rangle = d(\vec{k},s)|0\rangle = 0|0\rangle$. Vis at tilstanden $d^\dagger(\vec{k},s)|0\rangle$ er en egentilstand for H_D , med en bestemt egenverdi. Hvordan kan dette resultatet tolkes?

7. Hvordan kan tilstanden

$$b^\dagger(\vec{p},s)b^\dagger(\vec{k},s')|0\rangle \quad \text{interpreteres?}$$

Hva kan du si om denne tilstanden hvis $\vec{p} = \vec{k}$ og $s = s'$?

8) Vis at

$$\left\{\psi_\alpha^{(-)}(x)\ ,\ \overline{\psi_\beta^{(-)}(y)}\right\} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E}(\not{p}-m)_{\alpha\beta}\ e^{ip(x-y)} \quad .$$

Vedlegg.

Her er en del formler og uttrykk du kanskje har bruk for:

$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$

$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33}$, $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$

$\overline{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ der $\dagger$ betyr hermitisk konjugert.

$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $\left\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\right\} = 2g^{\mu\nu}$

$\gamma^i = \gamma^0 \alpha^i$

$\left\{ , \right\}$ betyr antikommutator

$\left[, \right]$ betyr kommutator

$[AB,C] = A[B,C]+[A,C]B = A\left\{B,C\right\} - \left\{A,C\right\}B$

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E(p)}} \left(b(\vec{p},s)u(\vec{p},s)e^{-ipx} + d^\dagger(\vec{p},s)v(\vec{p},s)e^{ipx}\right)$$
$$= \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x)$$

$px = p^\mu x_\mu$

$p_0 = E(p) = \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}$

$(i\not\partial - m)\psi(x) = 0$

$\not\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$

$\left\{b(\vec{p},s),\ b^\dagger(\vec{k},s')\right\} = \left\{d(\vec{p},s), d^\dagger(\vec{k},s')\right\} = \delta_{ss'}\delta(\vec{p}-\vec{k})$

alle andre antikommutatorer er null.

$u^\dagger(\vec{p},s)u(\vec{p},s') = \frac{E(\vec{p})}{m}\,\delta_{ss'} = v^\dagger(\vec{p},s)v(\vec{p},s')$

$\overline{u}(\vec{p},s)u(\vec{p},s') = \delta_{ss'} = -\overline{v}(\vec{p},s)v(\vec{p},s')$

$$v^{\dagger}(\vec{p},s)u(-\vec{p},s') = 0$$

$$\sum_s u_\alpha(\vec{p},s)\overline{u}_\beta(\vec{p},s) = \left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)_{\alpha\beta}$$

$$\sum_s v_\alpha(\vec{p},s)\overline{v}_\beta(\vec{p},s) = \left(\frac{\not{p}-m}{2m}\right)_{\alpha\beta} \quad .$$