Eksamen i

fag 71545 TEORETISK FYSIKK IIIA

Onsdag 11. desember 1974

kl. 09.00 - 16.00

(Tillatte hjelpemidler: Ingen).

Oppgave 1.

Den isoterme susceptibilitet χ_T (regnet per spinn) er bestemt av spinnkorrelasjonsfunksjonen

$$\Gamma(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle$$

for et makroskopisk Ising spinn system via fluktuasjonsteoremet

$$\chi_T = \frac{m^2 \mu_0}{kT} \sum_{\vec{r}} \Gamma(\vec{r}) \quad .$$

Utled dette.

Oppgave 2.

Et magnetisk materiale bestående av spinn lokalisert i et kubisk gitter befinner seg i et ytre magnetfelt $\vec{H}$. Systemets Hamiltonfunksjon H antas å være av følgende form

$$H = -\tfrac{1}{2} J \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j - \mu_0 \, m \, H \sum_i \sigma_i \tag{1}$$

Den skalare spinnvariable σ_i, knyttet til spinn nr. i , antar verdiene +1 , -1 ettersom spinnet peker parallellt, antiparallellt $\vec{H}$. Indeksparet (i, j) i et av dobbeltsummens ledd refererer seg til to nærmeste-nabo spinn.

a) Anta først at koplingskonstanten J er null og vis at i dette tilfellet er det midlere magnetiske moment per spinn, $\mathcal{M}$, gitt ved $\mathcal{M} = m\mathrm{Tanh}(m\mu_0 H/kT)$.

b) Hva er spinnkorrelasjonsfunksjonen $\Gamma(\vec{r})$ i dette tilfellet (J=0) ? Vis via fluktuasjonsteoremet i oppgave 1 at resultatene for $\mathcal{M}$ og $\Gamma(\vec{r})$ er konsistente.

c) Vi skal nå finne tilstandslikningen for stoffet i molekylarfelt-approksimasjonen (nå med $J \neq 0$). Herved erstattes Hamilton-funksjonen (1) med tilnærmelsen

$$H = -\tfrac{1}{2} J \sum_{(i,j)} \sigma_i \langle \sigma_j \rangle - \mu_0 m \, H \sum_i \sigma_i \quad .$$

Her er $\langle\ \rangle$ ensemble-middelverdien ved den herskende temperatur og feltstyrke.

Finn en likning for $\mathcal{M}$. Vis at tilstandslikningen kan skrives

$$\mathcal{H}(\mathcal{M},T) = \frac{kT}{2m\mu_o} \ln \frac{1+\mathcal{M}/m}{1-\mathcal{M}/m} - \frac{3J}{m\mu_o} \frac{\mathcal{M}}{m} ,$$

for $\mathcal{H} \neq 0$.

d) Hva er det kritiske punkt (Curietemperaturen)? Skisser isoterme magnetiseringskurver.

e) Beregn de kritiske indekser δ og γ for den kritiske isoterm $[\mathcal{M} \sim \mathcal{H}^{1/\delta}]$ og for den isoterme kompressibilitet i null felt, $[\chi_T \sim |T-T_c|^{-\gamma}, \ T > T_c]$.

Gi en kort kommentar om hvor alminnelig resultatet er.

Oppgave 3.

Fugasitetsutviklingen av tilstandslikningen er gitt ved Mayers likninger

$$\frac{p}{kT} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \bar{b}_\ell z^\ell ,$$

$$\rho = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \cdot \bar{b}_\ell \cdot z^\ell ,$$

der ρ er tettheten og z er fugasiteten.

a) Eliminer z (til tredje orden) og finn virialkoeffisientene B_2 og B_3 uttrykt ved $\bar{b}_2$ og $\bar{b}_3$.

b) Gi en diagrammatisk karakterisering av koeffisienten $\bar{b}_\ell$. Hva er en irredusibel graf (stjerne)? Vis at alle grafer i B_3 som ikke er stjerner kansellerer.

c) Virialutviklingen (tetthetsutviklingen) kan uttrykkes diagrammatisk som

$$\frac{p}{kT} = \rho + \left(1-\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\cdot(\text{sum av alle ulike umerkete irredusible grafer}).$$

Hva står en graf for i denne implisitte notasjon? Hva er en grafs symmetritall? Hva er symmetritallene for de irredusible grafer som inngår i B_2 og B_3?