Eksamen i TEORETISK FYSIKK IIIA 11. des. 1974

Løsninger

Oppgave 1

Det magnetiske moment per spinn, $\mathcal{M}$, for et system av $\mathcal{N}$ spinn, er gitt ved

$$\mathcal{M} = \frac{kT}{\mu_0}\frac{1}{\mathcal{N}}\frac{\partial}{\partial \mathcal{H}} \ln Z_{\mathcal{H}} \quad , \quad Z_{\mathcal{H}} = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta U(\sigma) + \beta m \mu_0 \mathcal{H} \sum_i \sigma_i} ,$$

og susceptibiliteten per spinn derfor

$$\chi_T = \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathcal{H}}\right)_T = \frac{kT}{\mathcal{N}\mu_0}\left[\frac{1}{Z_{\mathcal{H}}}\frac{\partial^2 Z_{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{H}^2} - \left(\frac{1}{Z_{\mathcal{H}}}\frac{\partial Z_{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{H}}\right)^2\right]$$

Hver derivasjon av $Z_{\mathcal{H}}$ bringer ned summen $\beta m \mu_0 \sum_i \sigma_i$. Når $\langle \; \rangle$ betegner den kanoniske middelverdi fås derfor

$$\chi_T = \frac{kT}{\mathcal{N}\mu_0}\left[(m\mu_0\beta)^2 \left\langle \sum_i \sigma_i \sum_j \sigma_j \right\rangle - (m\mu_0\beta)^2 \left\langle \sum_i \sigma_i \right\rangle^2\right]$$

$$= \frac{m^2 \mu_0 \beta}{\mathcal{N}} \sum_i \sum_j \Gamma(\vec{r}_i - \vec{r}_j) .$$

Når randeffekter neglisjeres er $\sum_j \Gamma(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \sum_{\vec{r}} \Gamma(\vec{r})$, uavhengig av i. Summen over i gir da faktor $\mathcal{N}$, dvs

$$\underline{\chi_T = m^2 \mu_0 \beta \sum_{\vec{r}} \Gamma(\vec{r})} .$$

Oppgave 2

a) $\mathcal{M} = m\langle \sigma_i \rangle$ generelt, og når $J = 0$ spesielt, idet spinnene er uavhengige

$$\sigma_i = \frac{\sum_{\sigma_i = \pm 1} \sigma_i \, e^{\beta \mu_0 m \mathcal{H} \sigma_i}}{\sum_{\sigma_i = \pm 1} e^{\beta \mu_0 m \mathcal{H} \sigma_i}} = \frac{e^{\beta \mu_0 m \mathcal{H}} - e^{-\beta \mu_0 m \mathcal{H}}}{e^{\beta \mu_0 m \mathcal{H}} + e^{-\beta \mu_0 m \mathcal{H}}} = \mathrm{Tanh}(\beta m \mu_0 \mathcal{H}),$$

dvs. $\underline{\mathcal{M} = m \, \mathrm{Tanh}(m\mu_0 \mathcal{H}/kT)}$

2b) For $J=0$ er ulike spinn ukorrelerte, med $\Gamma(\vec{r}_i-\vec{r}_j)=0$, men for $i=j$ fås $\Gamma(\vec{0})=\langle 1\rangle-\langle\sigma_i\rangle^2=1-\frac{\mathcal{M}^2}{m^2}$, dvs.

$$\Gamma(\vec{r}_i-\vec{r}_j)=\delta_{ij}\left[1-\mathrm{Tanh}^2(m\mu_0\mathcal{H}\beta)\right].$$

Det gir

$$m^2\mu_0\beta\sum_{\vec{r}}\Gamma(\vec{r})=\left[1-\mathrm{Tanh}^2(m\mu_0\mathcal{H}\beta)\right]m^2\mu_0\beta=\frac{\partial}{\partial\mathcal{H}}\left[m\,\mathrm{Tanh}(m\mu_0\mathcal{H}\beta)\right]$$

som stemmer med fluktuasjonsteoremet idet $m\,\mathrm{Tanh}(m\mu_0\mathcal{H}\beta)=\mathcal{M}$.

c) Mean-field Hamiltonfunksjonen kan skrives, da $\langle\sigma_j\rangle=\mathcal{M}/m$ og summen over j går over 6 nærmeste-nabo spinn:

$$H=\left(-3J\frac{\mathcal{M}}{m}-\mu_0 m\mathcal{H}\right)\sum_i\sigma_i\,.$$

Dette oppfattes som H for en sum av uavhengige spinn, og av resultatet under a) fås umiddelbart

$$\underline{\mathcal{M}=m\,\mathrm{Tanh}\left(\beta\left[\mu_0 m\mathcal{H}+3J\frac{\mathcal{M}}{m}\right]\right)}$$

Vi venter litt med å diskutere hvilken løsning $\mathcal{M}=\mathcal{M}(\mathcal{H})$ vi skal bruke. Først løses m.h.p. $\mathcal{H}$:

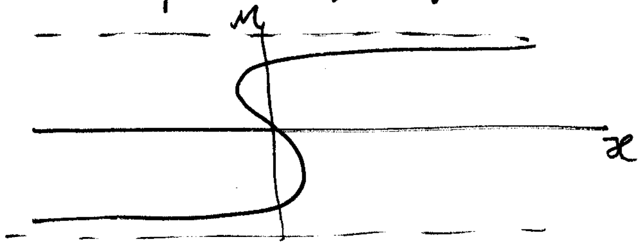
$$y=\mathrm{Tanh}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$ løses

lett mhp x: $x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$, som i vårt tilfelle medfører

$$\beta\left[\mu_0 m\mathcal{H}+3J\frac{\mathcal{M}}{m}\right]=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\mathcal{M}/m}{1-\mathcal{M}/m}$$ eller

$$\underline{\mathcal{H}=\frac{kT}{2\mu_0 m}\ln\frac{1+\mathcal{M}/m}{1-\mathcal{M}/m}-\frac{3J}{m\mu_0}\frac{\mathcal{M}}{m}}$$

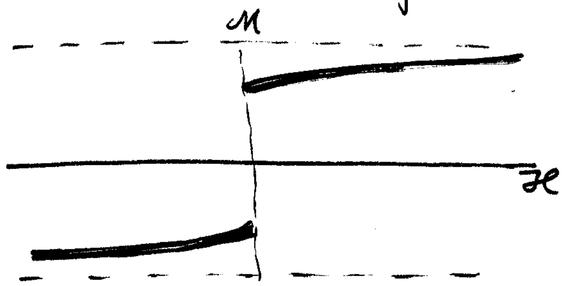
d) $\mathcal{M}$ er ikke en éntydig funksjon av $\mathcal{H}$ ved lave T; når ovenstående formel benyttes.



For å finne hvilken $\mathcal{M}$ som skal benyttes ser vi på den fri energi

$$G = -kT \ln Z_{\mathcal{H}} = -kT \ln 2 \cosh\left[\beta m \mu_0 \mathcal{H} + 3\beta J \frac{\mathcal{M}}{m}\right]$$

ser vi at løsningen som gir størst verdi for $|[\ ]|$ skal tas, dvs. størst verdi for $|\mathcal{M}/m|$. Altså:



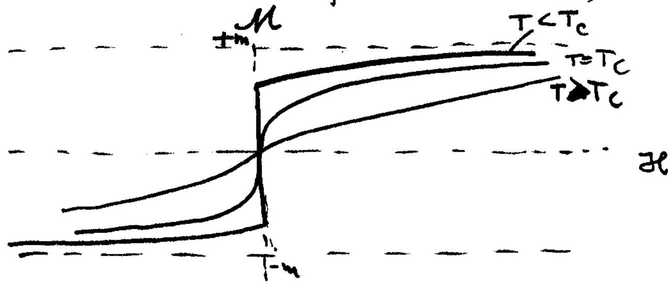
Den kritiske temperatur når denne spontane magnetisering er når

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{M}}\right)_{\mathcal{M}=0} = \frac{kT}{m^2 \mu_0} - \frac{3J}{m^2 \mu_0} = 0,$$

$$\boxed{T_c = \frac{3J}{k}}, \quad \text{Curietemperaturen.}$$

(Diskusjonen kunne vært fört anneledes)

Skisse:



e) Den kritiske isoterm er gitt ved

$$\mathcal{H} = \frac{3J}{2m\mu_0} \ln \frac{1+\mathcal{M}/m}{1-\mathcal{M}/m} - \frac{3J}{m\mu_0}\frac{\mathcal{M}}{m}$$

Ved utvikling i $\mathcal{M}$ fås

$$\mathcal{H} = \frac{3J}{m\mu_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathcal{M}}{m}\right)^{2n+1}\frac{1}{2n+1} = \frac{J}{m^4\mu_0}\mathcal{M}^3 + \mathcal{O}(\mathcal{M}^5)$$

D.v.s. $\boxed{\delta = 3}$

Susceptibiliteten χ_T i null felt er gitt ved

$$\chi_T^{-1} = \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathcal{M}}\right)_{T,\,\mathcal{M}=0} = \frac{kT}{m\mu_0} - \frac{3J}{m\mu_0} = \frac{k(T-T_c)}{m\mu_0} \quad \Rightarrow:$$

$$\chi_T = \frac{m\mu_0/k}{T-T_c}$$

for overkritiske temperaturer. D.v.s. $\boxed{\gamma = 1}$.

Dette er i overensstemmelse med Landau-teorien, der forutsetningen er at $\mathcal{H}(\mathcal{M},T)$ er analytisk nær det kritiske punkt.

Oppgave 3

a)

$$\left.\begin{aligned} \frac{p}{kT} &= \cancel{z}\, z + \bar{b}_2 z^2 + \bar{b}_3 z^3 + \mathcal{O}(z^4) \\ \rho &= z + 2\bar{b}_2 z^2 + 3\bar{b}_3 z^3 + \mathcal{O}(z^4) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\frac{p}{kT} = \rho - \bar{b}_2\rho^2 + (4\bar{b}_2^2 - 2\bar{b}_3)\rho^3 + \mathcal{O}(\rho^4)}$$

$$B_2 = -\bar{b}_2$$

$$B_3 = 4\bar{b}_2^2 - 2\bar{b}_3$$

b) F.eks. slik:

$\bar{b}_l = \frac{1}{l!}$ (summen av alle ulike sammenhengende grafer med l nummererte punkt).

En graf står da for et integral over alle $d\vec{r}_i$ unntatt én (der i tilsvarer punktenes nummerering) ~~og~~ med en integrand bestående av like mange faktorer $f_{ij} = e^{-\varphi(r_{ij})/kT} - 1$ som der er forbindelseslinjer (ij).

$B_3 = 4\bar{b}_2^2 - 2\bar{b}_3 =$ ( )^2 $- \frac{1}{3}$ $-$ (3 like grafer av siste typen).

Her er $= \int d\vec{r}_2\, d\vec{r}_3\, f_{12} f_{13} = \left(\int f_{12}\, d\vec{r}_2\right)^2 =$ ( )^2, dvs

$B_3 = -\frac{1}{3}$  .

En stjerne er en graf som ikke kan gjøres usammenhengende ved å fjerne ett punkt.

Altså kansellerte alle ikke-stjerner i B_3.

c) I denne implisitte notasjon står en graf for (i) en faktor $f_{ij} = e^{-\varphi(r_{ij})/kT} - 1$ for hvert bånd $\overline{i \quad j}$

(ii) en faktor ρ per punkt

(iii) en faktor s^{-1}, s = symmetritallet

(iv) en integrasjon over alle punkter unntatt ett.

Symmetritallet er antall permutasjoner (den identiske permutasjon inkludert) av merkene på en merket (nummerert) graf som gir topologisk sett samme graf.

$s($  $) = 2$

$s($  $) = 6.$