Eksamen i

fag 71545 TEORETISK FYSIKK IIIA

Tirsdag 13.januar 1976

kl.0900-1500

(Tillatte hjelpemidler: Regnestav og matematiske tabeller)

Oppgave 1.

a) Vis at relasjonen

$$\mathcal{P}\Omega = \frac{2}{3} E \qquad (1)$$

gjelder for en ikke-relativistisk ideell Fermi gass ved T=0. Hva blir den totale kinetiske energi E (uttrykt ved Fermi-energien ε_F) ?

b) Beregn total energi, og finn relasjonen som tilsvarer (1), for en ekstremt relativistisk ideell elektrongass.

c) Hva er det kjemiske potensial for en fotongass (i en beholder) ? Finn relasjonen for fotoner som tilsvarer (1) .

Oppgitt:

$$Z_g = \begin{cases} \prod_k (1+ze^{-\beta\varepsilon_k}) & \text{for fermioner,} \\ \prod_k (1-ze^{-\beta\varepsilon_k}) & \text{for bosoner,} \end{cases}$$

$$N = \sum_k \langle n_k \rangle = z\frac{\partial}{\partial z}(\ln Z_g) ,$$

$$z = e^{\beta\mu} ,$$

$$\beta = 1/KT ,$$

$$\mathcal{P} = -(\partial E/\partial\Omega)_S = -(\partial F/\partial\Omega)_T = \beta^{-1}(\partial \ln Z/\partial\Omega)_T ,$$

$$\rho = N/\Omega = (g/6\pi^2)(p_F/\hbar)^3 \text{ for fermioner,}$$

der z er fugasiteten, μ er kjemisk potensial, K er Boltzmanns konstant, T er temperatur, ε_k er ikke-relativistisk eller relativistisk énpartikkel-energi, $\langle n_k \rangle$ er midlere besettelsestall, N er totalt antall partikler, Z_g er den store kanoniske partisjonsfunksjonen, $\mathcal{P}$ er trykket, ρ er partikkeltetthet, Ω er volum, g er degenerasjonsgrad og p_F er Fermi-impulsen.

Oppgave 2.

a) Hva er klassisk diamagnetisme for et system av ladete partikler i termisk likevekt i et ytre magnetfelt ? (Utledning kreves ikke). Vis at énpartikkel-energinivåene for elektron-tilstandene i et ytre magnetfelt $\underset{\sim}{B}=\nabla\times\underset{\sim}{A}$ (ifølge Bohrs kvanteteori), når vi neglisjerer spinn, er

$$\varepsilon(l,j) = 2(\pi\hbar l)^2/m\Omega^{2/3} + (j+\tfrac{1}{2})(e\hbar B/m) ,$$

der $j = 0,1,2,\ldots$ og $l = 0,\pm1,\pm2,\ldots$.
Ω er et kubisk volum, og m og e er elektronets masse og ladning.

b) Argumentér for at hvert av nivåene oppgitt under a) er degenerert med degenerasjonsgrad

$$g = eB\Omega^{2/3}/2\pi\hbar .$$

Hva blir uttrykkene for logaritmen til den store kanoniske partisjonsfunksjonen Z_g og for totalt (midlere) antall elektroner N ?

c) Betrakt elektron-systemet ved høye temperaturer, finn magnetisk moment M og differensiell susceptibilitet χ for svakt magnetfelt, og vis at vi får en relasjon tilsvarende Curies lov. Hva blir Curie-konstanten (uttrykt ved partikkel-tettheten ρ) ?

Oppgitt:

$$M = KT\frac{\partial}{\partial B}(\Omega^{-1}\ln Z_g) ,$$

$$\chi = \partial M/\partial B ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\pi/\alpha} .$$

Oppgave 3.

a) Et (nøytralt) system av N elektroner i et volum Ω vekselvirker ved Coulomb-potensialet

$$v(\underset{\sim}{r},\underset{\sim}{r}') = e^2/|\underset{\sim}{r}-\underset{\sim}{r}'| .$$

Finn Fermienergien, dvs.kinetisk energi pr.partikkel for elektrongassen innen Hartree-approksimasjonen i [rydberg] enheter, når vi innfører en dimensjonsløs parameter r_s definert ved

$$r_s = r_0/r_B = (me^2/\hbar^2)r_0 \ ,$$

der den "atomære" radius r_0 er definert ved

$$\Omega/N = \rho^{-1} = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \ ,$$

og der m og e er elektronets masse og ladning. Hva blir uttrykket for Hartree-Fock energien i samme enheter, når "exchange"-energien er gitt ved

$$E_{ex} = - e^2 k_F^4/(4\pi^3\rho) \ ?$$

b) I en modifisert Hartree modell for elektrongassproblemet vil vi anta en uniform fordeling av elektroner (konstant ladningstetthet) og at de befinner seg i en positiv ladningsbakgrunn som er samlet i punktladninger $|e|$ med én ladning pr.volumelement $\rho^{-1} = \Omega/N$ (tilsvarende volum pr.elektron) Betrakt hvert slikt volumelement (med radius r_0) separat. Finn energi p.g.a. vekselvirkning med positiv ladningsbakgrunn, elektronets "self-energy", og vis at total energi pr.elektron i en slik Hartree modell (uten "exchange"-bidrag) er

$$E_H = 2.21/r_s^2 - 1.80/r_s \quad \text{ry} \ .$$

Finn likevektsverdien for tettheten, dvs.for parametrene r_s eller r_0.

c) Betrakt et ferromagnetisk elektron-system der alle spinn er antatt paralelle. Vis at Hartree-Fock energien pr.elektron for en slik elektrongass kan skrives

$$E_{HF} = 3.51/r_s^2 - 1.154/r_s \quad \text{ry} \ .$$

<u>Oppgitt</u>:

1 rydberg = $\frac{1}{2}me^4/\hbar^2$ = 13.60 eV,

1 Bohr (radius) = $r_B = \hbar^2/me^2$ = 0.529 Å .