Eksamen i

fag 71545 TEORETISK FYSIKK 3A

torsdag 25.august 1977

kl.0900-1600

(Hjelpemidler: Egne notater, xerograferte øvingsoppgaver med løsninger, matematisk formelsamling.)

*

Oppgave 1 og 2 handler om den endimensjonale Ising-modell. Hamiltonfunksjonen $-\beta^{-1}\mathcal{H}_N$ er gitt ved

$$\mathcal{H}_N = \sum_{i=1}^{N} K_i \; s_i s_{i+1} + h \sum_{i=1}^{N} s_i$$

der

$$K_i \equiv -\beta J_i \quad , \quad h \equiv -\beta H \quad , \quad \text{og} \quad s_i = \pm 1 \quad .$$

J_i er koplingskonstantene og H er et homogent magnetisk felt.

*

Oppgave 1.

a) Sett $H = 0$ og beregn den eksakte partisjonsfunksjonen $Z_N(T,H=0) = \sum_{\{s\}} e^{\mathcal{H}_N}$ (f.eks. v.h.a. en enkel rekursjonsformel i N). Finn Gibbs fri energi.

b) Beregn den eksakte spinn-spinn-korrelasjonsfunksjonen

$$\Gamma_k(r) = \langle s_k s_{k+r} \rangle$$

i null felt.

c) Finn den eksakte magnetiseringen for $H \to 0$ v.h.a. et enkelt argument direkte fra spinn-spinn-korrelasjonsfunksjonen. Tolk resultatet.

d) Gi en skissemessig diskusjon av midlere felt-approksimasjonen for $K_i = K$ $i=1,\ldots N$ og beregn den tilhørende kritiske temperatur.

e) Foreta en kvalitativ sammenligning mellom midlere-felt-approksimasjonen og de eksakte resultatene når $K_i = K$.

Oppgave 2.

Se igjen på en homogen Ising modell, $K_i = K$, med syklisk randbetingelse $s_{N+1} = s_1$ og sett $H=0$.

a) Konstruer en Wilson-transformasjon ved forskriften (N = like tall)

$$\sum_{\{s_2, s_4, \ldots, s_N\}} e^{\mathcal{H}_N(K)} \equiv e^{\mathcal{H}_{N/2}(K') + Nf(K)}$$

og vis at transformasjonen av koplingskonstanten blir

$$K' = \tfrac{1}{2} \ln \cosh 2K$$

mens

$$f(K) = \tfrac{1}{2}(K' + \ln 2) \ .$$

b) Finn transformasjonens fikspunkt og diskuter transformasjonen for $K < \infty$.
Diskuter det lineariserte problem og bestem egenverdiene. Finnes det en faseovergang?

c) Bruk den nye variable

$$\zeta = \tanh K$$

og vis at etter n iterasjoner

$$K^{(n)} = \tfrac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\zeta^{2^n}}{1-\zeta^{2^n}}\right)$$

d) Gibbs fri energi per spinn er gitt ved (i null felt)

$$g(K) = -kT \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(K^{(n)})}{2^n} \ .$$

Bevis det.

e) Bruk identiteten

$$\frac{1}{1-x} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+x^{2^n}}{1-x^{2^n}}\right)^{2^{-(n+1)}} \quad , \quad -1 < x < 1$$

for å finne

$$g(K,H=0) = -kT \ln(2\cosh K) \quad .$$

Oppgave 3.

I det alminnelige tilfellet av et vilkårlig ferromagnetisk system i d dimensjoner skal Widoms homogenitetsantagelse formuleres og sammenhengen med Wilson teorien forklares. Hvordan beregnes de termodynamiske kritiske indekser $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ut av egenverdiene for den lineariserte transformasjonen ?

*