# Forslag til løsning

## Oppgave I

Partisjonsfunksjonen:

$$Z = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots\cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} e^{-\beta H}$$

Magnetisk moment (midlere spinn) finnes ved derivere m.h.p. $\mathcal{H}$.

$$M = \frac{1}{N} m \sum_i \langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{\beta \mu_0 N} \frac{Z'}{Z} = \frac{1}{\beta \mu_0} \frac{\partial}{\partial \mathcal{H}} \left( \frac{1}{N} \ln Z \right)$$

der $Z' = \left( \frac{\partial Z}{\partial \mathcal{H}} \right)_\beta$.

Energi $\langle H \rangle$ finnes ved å derivere m.h.p. $\beta$.

$$\langle H \rangle = -\frac{1}{Z} \left( \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)_{\mathcal{H}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} (\ln Z)$$

Systemets spinnkorrelasjonsfunksjon er definert ved

$$\Gamma(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle$$

Hver derivasjon av $Z$ m.h.p. $\mathcal{H}$ gir en faktor $\sigma_i$ som blir midlet. Følgelig

$$\left( \frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}} \right)_T = \frac{1}{\beta \mu_0 N} \left( \frac{Z'}{Z} \right)' = \frac{1}{\beta \mu_0 N} \left[ \frac{Z''}{Z} - \left( \frac{Z'}{Z} \right)^2 \right] =$$

$$\frac{(\beta \mu_0 m)^2}{\beta \mu_0 N} \sum_{ij} \left[ \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle \right] = \frac{\beta m^2 \mu_0}{N} \sum_{ij} \Gamma(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \beta m^2 \mu_0 \sum_{\vec{r}} \Gamma(\vec{r})$$

# Oppgave II

Fourier transformert blir likningen

$$\tilde{h}(k) = \tilde{c}(k) + \rho\, \tilde{c}(k)\cdot \tilde{h}(k)$$

Kontinuitet av $h(x) - c(x)$ ved $x = d$ gir

$$h(d-) - c(d-) = h(d+) - c(d+)$$

$$h(d+) = c(d+) - c(d-) + h(d-) = 0 - \frac{-1+\rho d}{(1-\rho d)^2} - 1$$

$$= \frac{1}{1-\rho d} - 1$$

$$n(d+) = \rho^2 (h(d+)+1) = \frac{\rho^2}{1-\rho d}$$

Ved virialteoremet:

$$\beta p = \rho + d\frac{\rho^2}{1-\rho d} = \frac{\rho}{1-\rho d}$$

Sammenhengen mellom $h(x)$ og $c(x)$ gir

$$\tilde{h}(k) = \frac{\tilde{c}(k)}{1-\rho\tilde{c}(k)} \;;\quad 1+\rho\tilde{h}(k) = \frac{1}{1-\rho\tilde{c}(k)}$$

$$\tilde{c}(0) = \int c(x)\,dx = 2\int_0^d a(-1+\rho x)\,dx = -2ad + a\rho d^2$$

Følgelig ved fluktuasjonsteoremet:

$$\left(\frac{\partial(\beta p)}{\partial\rho}\right)_\beta = \frac{1}{1+\rho\tilde{h}(0)} = 1-\rho\tilde{c}(0) = 1 + 2\frac{\rho d}{(1-\rho d)^2} - \frac{(\rho d)^2}{(1-\rho d)^2}$$

$$= \frac{1-2\rho d+(\rho d)^2+2\rho d-(\rho d)^2}{(1-\rho d)^2} = \frac{1}{(1-\rho d)^2}$$

## Oppgave III

„Multiplikasjonstabellen" for $\mathcal{J}_1$ og $\mathcal{J}_2$ blir:

$$\mathcal{J}_1\mathcal{J}_1 = (D+\Delta)(D+\Delta) = DD + 2D\Delta + \Delta\Delta =$$
$$\tfrac{1}{3}[D+2\Delta+2D+\Delta] = D+\Delta = \underline{\underline{\mathcal{J}_1}}$$

$$\mathcal{J}_2\mathcal{J}_2 = (-D+2\Delta)(-D+2\Delta) = DD - 4D\Delta + 4\Delta\Delta =$$
$$= \tfrac{1}{3}(D+2\Delta-4D+4\Delta) = -D+2\Delta = \underline{\underline{\mathcal{J}_2}}$$

$$\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 = (D+\Delta)(-D+2\Delta) = -DD + D\Delta + 2\Delta\Delta =$$
$$\tfrac{1}{3}(-D-2\Delta+D+2\Delta) = \underline{\underline{0}}$$

Fra definisjonen av $\mathcal{J}_1$ og $\mathcal{J}_2$ finnes ved løsning av likningene:

$$D = \tfrac{1}{3}(2\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2) \quad \text{og} \quad \Delta = \tfrac{1}{3}(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2)$$

Uttrykt ved $\mathcal{J}_1$ og $\mathcal{J}_2$

$$\underline{\underline{\rho\tilde{v}(12) = -2y\mathcal{J}_1 + y\mathcal{J}_2}}$$

$\tilde{K}(12)$ må ha formen $\rho\tilde{K}(12) = a\mathcal{J}_1 + b\mathcal{J}_2$ som innsatt i definisjonslikningen og bruk av „multiplikasjonstabellen" gir:

$$a\mathcal{J}_1 + b\mathcal{J}_2 = -2y\mathcal{J}_1 + y\mathcal{J}_2 + (-2ya)\mathcal{J}_1 + ya\mathcal{J}_2$$

eller $\quad a = \dfrac{-2y}{1+2y} \quad$ og $\quad b = \dfrac{y}{1-y}$

Altså: $\underline{\underline{\rho\tilde{K}(12) = (a-b)D + (a+2b)\Delta = \dfrac{1}{(1-y)(1+2y)}\left[-3y\tilde{D}(12) + 6y^2\tilde{\Delta}(12)\right]}}$

Alternativt (da $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 = 0$, $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_1$ og $\mathcal{J}_2\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_2$)

$$\rho\tilde{K}(12) = \sum_{n=1}^{\infty}(-3yD)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-2y)^n\mathcal{J}_1 + \sum_{n=1}^{\infty}y^n\mathcal{J}_2 = \frac{-2y}{1+2y}\mathcal{J}_1 + \frac{y}{1-y}\mathcal{J}_2.$$

——— „ ———