

Lösungen

1a) Totalt antisymmetrisk tilstandsfunksjon $\Psi = \varphi(\vec{r}) \chi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \zeta(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$
gir mulige tilstander ($\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$)

Isospin del	Spin del	Rom del	Tillatte tilstander
Sym. $T=1$ ($pp, \frac{1}{2}(pn+np), nn$)	Sym $S=1$	Antisym $(-1)^L = -1$ L=ulike	$^3P, ^3F, \dots$
Antisym $T=0$ ($\frac{1}{2}(pn-np)$)	Antisym $S=0$	Sym $(-1)^L = 1$ L=like	$^1S, ^1D, \dots$
	Sym $S=1$	Sym $(-1)^L = 1$ L=like	$^3S, ^3D, \dots$
	Antisym $S=0$	Antisym $(-1)^L = -1$ L=ulike	$^1P, ^1F, \dots$

Et pp eller et nn system kan bare være i tilstandene $^1S, ^3P, ^1D, ^3F$ osv. mens et np system kan være i alle.

b)

Spredningsamplituden $f_l(\vartheta)$ for en 2-nukleon tilstand (bortsett fra Coulomb-spredningsbidrag) er med l =like symmetrisk om $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ mens den med l =ulike er antisymmetrisk da

$$f_l \sim P_l(\cos \vartheta) \quad \text{og} \quad P_l(\cos(\pi - \vartheta)) = (-1)^l P_l(\cos \vartheta)$$

Ved spredningsenergi E_{lab} bidrar partialbølger med $l \leq l_{max} = \sqrt{\frac{2 m_{red} E_{lab}}{\hbar^2}} R = \sqrt{\frac{m E_{lab}}{2 \hbar^2}} R$ til spredningskoeffisienten

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \sum_{l=0}^{l_{max}} f_l \right|^2 \quad (R = \text{kjernekreftenes rekkevidde})$$

Ved n-p-spredning er for $E_{lab} \ll 10 \text{ MeV}$ $l_{max} \approx 0$

og for $E_{lab} \approx 20 \text{ MeV}$ $l_{max} \approx 1$

a) Isotrop np-spredning opp til $E_{lab} \sim 25-30 \text{ MeV}$ viser da at bidraget fra $f_{l=1} \sim \cos \vartheta$ må være lite og altså svake krefter i denne tilstanden.

b) Symmetrisk spredningskoeffisient (om $\vartheta = \frac{\pi}{2}$) for energier opp til et par hundre MeV hvor mange partialbølger bidrar, viser at ingen interferens-ekkl mellom l -like og $l \pm 1$ -like ($f_l, f_{l\pm 1}$ osv.) kan opptre. Derfor spredningsamplituden er bare en type.

Før en tilstand med like parret (ψ^+) henholdsvis ulike (ψ^-)

er
$$P^M \psi^\pm = \pm \psi^\pm$$

$$P^M \psi^\pm = -P^B P^M \psi^\pm = \mp P^B \psi^\pm$$

Potensialet gir da:

$$V(r)\psi^\pm = f(r) [w \pm m + (b \mp h)P^B] \psi^\pm$$

I tilstander med ulike parret er potentialet meget svært både i triplet og singlett-tilstander slik at

$$\underline{w \approx m} \quad \text{og} \quad \underline{b \approx -h}$$

og altså:

$$\underline{V(r) \approx f(r) [w(1+P^M) + b(P^B - P^M)]}$$

c) P.g.a Pauli prinsippet opptrer to identiske partikler ikke i den fullstendige spin- og rom-symmetriske tilstanden som deuterons grunn tilstand 3S_1 er. De to neutronenes laveste tilstand er da 1S_0 som ikke er bundet for et n-p-system heller.

2a) Hamilton funksjonen er separabel i x, y og z-koordinatene

$$\Psi_{n_x, n_y, n_z} = \psi_{n_x}(x) \psi_{n_y}(y) \psi_{n_z}(z) = \left(\frac{m}{\pi \hbar}\right)^{3/4} (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/4} \left(\frac{1}{2^{n_x+n_y+n_z} n_x! n_y! n_z!} \right)^{1/2} H_{n_x}\left(\frac{m\omega_x}{\hbar}x\right) H_{n_y}\left(\frac{m\omega_y}{\hbar}y\right) H_{n_z}\left(\frac{m\omega_z}{\hbar}z\right) \times e^{-\frac{m}{2\hbar}(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2)}$$

med tilhørende energi eigenverdier:

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \hbar\omega_x \left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_y \left(n_y + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_z \left(n_z + \frac{1}{2}\right) \\ = \hbar\omega_0 \left[\left(n_x + n_y + n_z + \frac{1}{2}\right) + \frac{\epsilon}{3} (n_x + n_y - 2n_z) \right]$$

$$E_{000} = \hbar\omega_0 \frac{3}{2}$$

$$E_{001} = \hbar\omega_0 \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\epsilon\right)$$

$$E_{100} = E_{010} = \hbar\omega_0 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\epsilon\right)$$

$$E_{002} = \hbar\omega_0 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\epsilon\right)$$

$$E_{101} = E_{011} = \hbar\omega_0 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\epsilon\right)$$

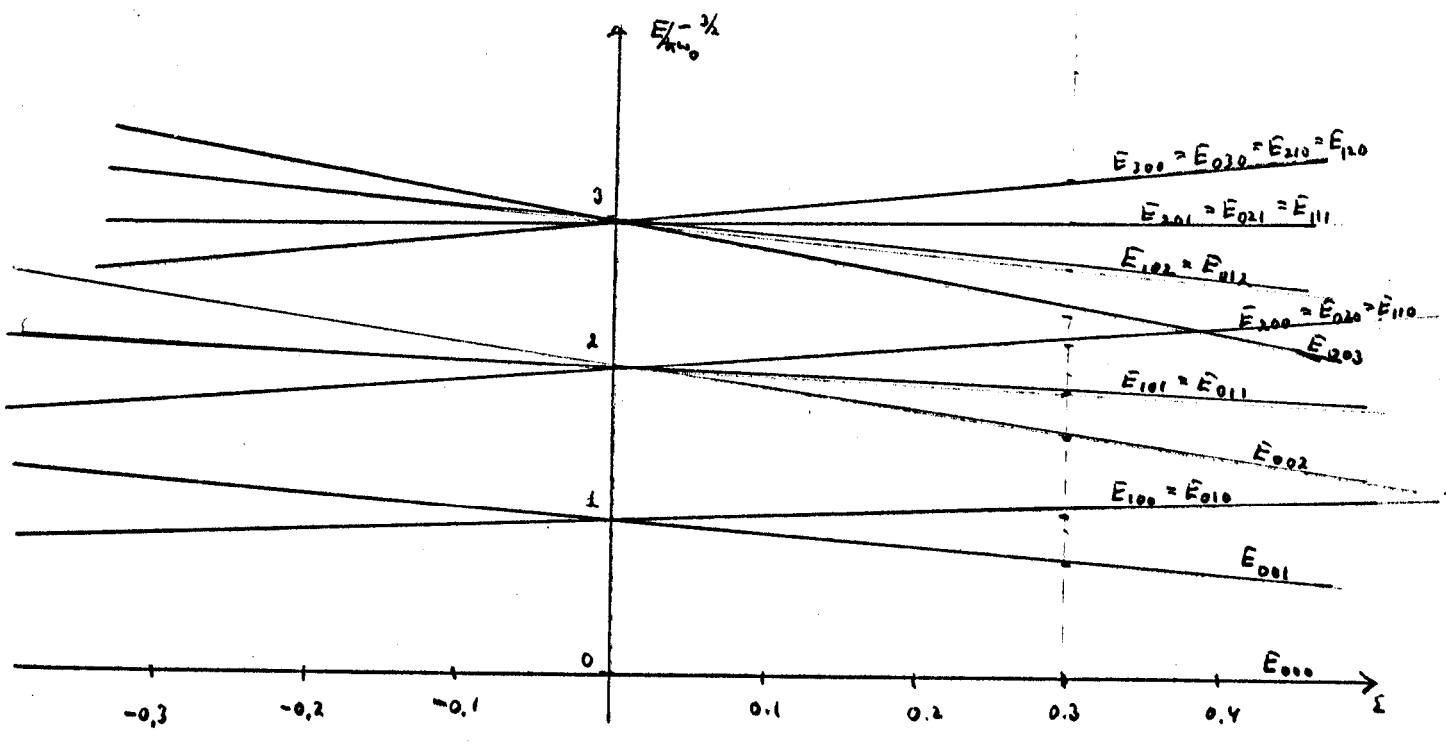
$$E_{200} = E_{020} = E_{110} = \hbar\omega_0 \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\epsilon\right)$$

$$E_{003} = \hbar\omega_0 \left(\frac{3}{2} - 2\epsilon\right)$$

$$E_{102} = E_{012} = \hbar\omega_0 \left(\frac{3}{2} - \epsilon\right)$$

$$E_{201} = E_{021} = E_{111} = \hbar\omega_0 \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$E_{300} = E_{030} = E_{210} = E_{120} = \hbar\omega_0 \left(\frac{3}{2} + \epsilon\right)$$



b)

$$p \quad (000)^2 (001)^2 (100)^2 (010)^2 (002)^2 (101)^2 (011)^2$$

$$n \quad (000)^4 (001)^2 (100)^2 (010)^2 (002)^2 (101)^2 (011)^2$$

enthält nur die beiden nicht orthogonale $(101)^2 (011)^2$ oder lineare Kombinationen aus diesen beiden.

$$\Psi = \prod_{i=1}^{z=13} \psi_{\alpha_i}(\vec{r}_i) \prod_{j=1}^{N-A-Z=14} \psi_{\beta_j}(\vec{r}_{13+j})$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 000 = \beta_1 = \beta_2$$

$$\alpha_3 = \alpha_4 = 001 = \beta_3 = \beta_4$$

o.v.

$$\alpha_{13} = 011 = \beta_{13} = \beta_{14}$$

Uitbreiding for $\frac{27}{12} A_L$:

$$x = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_x}} \frac{a+a^\dagger}{2} \quad x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_x} (a+a^\dagger)^2$$

$$(a+a^\dagger)|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle + \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$(a+a^\dagger)^2|n\rangle = \sqrt{n(n-1)}|n-2\rangle + \sqrt{n(n+1)}|n\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)}|n+2\rangle$$

$$\langle n|(a+a^\dagger)^2|n\rangle = (2n+1)$$

$$\langle n|x^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega_x} (2n+1)$$

$$R_x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_x} (2n_x+1)} = \sqrt{\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \frac{mc^2}{\hbar\omega_0} \frac{2n_x+1}{2(1+\frac{1}{2})}}$$

$$= 2 \cdot 10 \cdot 10^{-14} \sqrt{\frac{938 \cdot 2}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2(1+\frac{1}{2})}} \text{ cm} = 2.20 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

Högste nivåer: $n_x=1$
 $101, 011$ $n_y=1$
 $n_z=1$

$$R_y = R_x = 2.10 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

$$R_z = 2.10 \cdot 10^{-14} \sqrt{\frac{938 \cdot 3}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2(1-\frac{1}{2})}} = 2.20 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

c) Kvadrerat moment:

$$Q = \int \Psi^* \sum_{i=1}^Z (2z_i^2 - x_i^2 - y_i^2) \Psi \prod_{i=1}^N d^3r_i = \sum_{i=1}^Z (2\langle z_i^2 \rangle - \langle x_i^2 \rangle - \langle y_i^2 \rangle) = \sum \left\{ 2(n_z + \frac{1}{2}) \frac{\hbar}{m\omega_z} - (n_x + \frac{1}{2}) \frac{\hbar}{m\omega_x} - (n_y + \frac{1}{2}) \frac{\hbar}{m\omega_y} \right\}$$

$$= \frac{\hbar}{m} \sum \left[\left(\frac{2n_z}{\omega_z} - \frac{n_x+n_y}{\omega_x} \right) + \left(\frac{1}{\omega_z} - \frac{1}{\omega_x} \right) \right] \quad \text{da } \omega_x = \omega_y$$

$$= \frac{\hbar}{m} \left(\frac{2}{\omega_z} \sum n_z - \frac{1}{\omega_x} \sum (n_x+n_y) + Z \left(\frac{1}{\omega_z} - \frac{1}{\omega_x} \right) \right)$$

For $^{27}_{13}\text{Al}$ med $Z=13$ og to protoner i hver tilstand opp til 101 og ett proton i 011 fæser:

$$Q = \frac{\hbar}{m} \left[\frac{2}{\omega_z} (0.2 + 1.2 + 0.2 + 0.2 + 2.2 + 1.2 + 1.1) - \frac{1}{\omega_x} (0.2 + 0.2 + 1.2 + 1.2 + 0.2 + 1.2 + 1.1) + 13 \left(\frac{1}{\omega_z} - \frac{1}{\omega_x} \right) \right]$$

$$= \frac{\hbar}{m} \left[\frac{2}{\omega_z} (2+4+2+1) - \frac{1}{\omega_x} (2+2+2+1) + 13 \left(\frac{1}{\omega_z} - \frac{1}{\omega_x} \right) \right] = \frac{\hbar}{m} \left(\frac{29+13}{\omega_z} - \frac{7+13}{\omega_x} \right)$$

$$= \frac{\hbar}{m \omega_0} \left(\frac{31}{1-\frac{2}{3}\epsilon} - \frac{20}{1+\frac{1}{3}\epsilon} \right) = \frac{\hbar}{m \omega_0} \frac{11 + \frac{71}{3}\epsilon}{1-\frac{1}{3}\epsilon - \frac{2}{9}\epsilon^2} = \frac{\hbar}{m \omega_0} \parallel \frac{1 + \frac{71}{3}\epsilon}{1-\frac{1}{3}\epsilon - \frac{2}{9}\epsilon^2} = 3.027 \cdot 10^{-26} \cdot 11 \cdot 126 \omega^2 = \underline{0.41 \cdot 10^{-24} \text{ m}^2}$$

For $^{16}_8\text{O}$ med $Z=8$

$$Q = \frac{\hbar}{m} \left[\frac{2}{\omega_z} (0.2 + 1.2 + 0.2 + 0.2) - \frac{1}{\omega_x} (0.2 + 0.2 + 1.2 + 1.2) + 8 \left(\frac{1}{\omega_z} - \frac{1}{\omega_x} \right) \right] = \frac{\hbar}{m} (4+8) \left(\frac{1}{\omega_z} - \frac{1}{\omega_x} \right) = 0$$

her $\omega_x = \omega_z$ som ventet for storiske kjerne med fylt skall.

3) Ikke-diagonale ledd i $\gamma_{\mu} (G_{\nu} - G_{\mu} \gamma_5)$ vil forbinde store og små komponenter i $\bar{\psi}_p$ og ψ_n og gi ledd av orden $O(\frac{v}{c})$ ~~etc.~~

Bare de γ_{μ} og $\gamma_{\mu} \gamma_5$ som inneholder diagonal ledd, vil da gi bidrag når $\frac{v}{c}$ er neglisjerbar.

Det $\gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ og $\gamma_k \gamma_5 = \begin{pmatrix} i\sigma_k & 0 \\ 0 & -i\sigma_k \end{pmatrix}$

Vi står da igjen med

$$\langle f | H | i \rangle \approx G_{\nu} \int (\bar{\psi}_p \gamma_{\mu} \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) \psi_{\nu}) d^3r - G_{\mu} \int (\bar{\psi}_p \gamma_{\mu} \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) \psi_{\nu}) d^3r$$

$$= G_{\nu} \int (\bar{\psi}_p \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) \psi_{\nu}) d^3r - i G_{\mu} \int (\bar{\psi}_p \sigma_k \psi_n) (\bar{\psi}_e \vec{\sigma} (1 + \gamma_5) \psi_{\nu}) d^3r$$

når de små komponentene ψ_3 og ψ_4 i ψ_p og ψ_n er satt like 0. P.g.a midling over alle spinnretningene vil interferensleddene mellom G_{ν} og G_{μ} -leddene som inneholder $\vec{\sigma}$, forsvinne og den oppgitte approksimasjonen fæser.

Utvalgsregler:

Her $\psi_{\nu} \sim u_{\nu} e^{i\vec{k}_{\nu} \cdot \vec{r}} = u_{\nu} (1 + i\vec{k}_{\nu} \cdot \vec{r} + \dots)$ og da ψ_p og $\psi_n \neq 0$ bare for $r \in R$ gir 1. ledd: $G_{\nu} \int_0^R \bar{\psi}_p(\vec{r}) \psi_n(\vec{r}) (1 + i\vec{k}_{\nu} \cdot \vec{r} + \dots) d^3r \cdot \bar{u}_e \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) u_{\nu}$

Leddet her med 1 gir med nukleon tilstandsfunksjon av formen $\psi = R(r) Y_{l,m}(\theta, \phi)$ $\int Y_{l_f, m_f}^+ \cdot 1 \cdot Y_{l_i, m_i} d\Omega \neq 0$ bare for $\Delta I = I_f - I_i = 0$ ved "tillatte" overganger.

Ledd med $(\vec{k}_{\nu} - \vec{k}_e) \cdot \vec{r} = \Delta k \cdot r P_2(\cos \theta)$ gir $\int Y_{l_f, m_f}^+ P_2 Y_{l_i, m_i} d\Omega \neq 0$ for $\Delta I = 0, \pm 1$ for "1. gangsforbudte" overganger o.s.v.

Ledd nr 2 gir tilsvarende $\int Y_{l_f, m_f}^+ \vec{\sigma} \cdot Y_{l_i, m_i} d\Omega \neq 0$ for $\Delta I = 0, \pm 1$ for "tillatte" overganger ("spinnflipp" p.g.a $\vec{\sigma}$)

$\int Y_{l_f, m_f}^+ \vec{\sigma} \cdot P_2 Y_{l_i, m_i} d\Omega \neq 0$ for $\Delta I = 0, \pm 1, \pm 2$ for "1. gangsforbudte" overganger. o.s.v.