Eksamen i

fag 71545 Teoretisk fysikk, særkurs A

Onsdag 27.august 1980

kl.0900-1400

Tillatte hjelpemidler: Regnestav, lommekalkulator og matematisk formelsamling (Rottmann).

Oppgave 1

Den endimensjonale Isingmodellen med nærmeste nabo vekselvirkning J i ytre magnetfelt $\mathcal{H}$ har Hamiltonfunksjonen

$$H = -J \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1} - \mathcal{H} \sum_i \sigma_i$$

der $\sigma_i = \pm 1$ er den spinnvariable, og summasjonene går over systemets N spinn (med $\sigma_{N+1} = \sigma_1$). Skriv ned systemets partisjonsfunksjon Z.

Ved beregning av Z (skal ikke gjøres her) finnes

$$\lambda = \frac{1}{N} \ln Z = \beta J + \ln \left[\cosh(\beta\mathcal{H}) + \sqrt{\sinh^2(\beta\mathcal{H}) + e^{-4\beta J}} \right]$$

der $\beta = 1/kT$. Finn ut fra dette magnetisk moment $m = \langle\sigma_i\rangle$ pr.spinn og susceptibilitet $(\partial m/\partial\mathcal{H})_T$. Finn så midlere energi $\langle H\rangle$ for $\mathcal{H} = 0$.

Oppgave 2

Fugasitetsutviklingen av tilstandsligningen er gitt ved Mayers ligninger

$$\frac{p}{kT} = \sum_{l=1}^{\infty} \bar{b}_l z^l ,$$

$$\rho = \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot \bar{b}_l \cdot z^l ,$$

der ρ er tettheten og z er fugasiteten.

a) Eliminer z (til tredje orden) og finn virialkoeffisientene B_2 og B_3 uttrykt ved $\bar{b}_2$ og $\bar{b}_3$.

b) Gi en diagrammatisk karakterisering av koeffisienten $\bar{b}_l$. Hva er en irredusibel graf (stjerne)? Vis at alle grafer i B_3 som ikke er stjerner kansellerer.

c) Virialutviklingen (tetthetsutviklingen) kan uttrykkes diagrammatisk som

$\frac{p}{kT} = \rho + (1-\rho \frac{\partial}{\partial \rho})\cdot$(sum av alle ulike umerkete irredusible grafer).

Hva står en graf for i denne implisitte notasjon? Hva er en grafs symmetritall? Hva er symmetritallene for de irredusible grafer som inngår i B_2 og B_3 ?

Oppgave 3

Ved γ-utvikling gir kjedebåndsgrafene første ordens korreksjon til referensesystemets parkorrelasjonsfunksjon. For en polar væske er den Fouriertransformerte summen $\tilde{K}(12)$ av disse bestemt ved

$$\tilde{K}(12) = \tilde{v}(12) + \rho\int \tilde{v}(13)\tilde{K}(32)\,\frac{d\Omega_3}{\Omega}$$

der potensialbåndet er gitt ved $(k\to 0)$

$$\rho\tilde{v}(12) = -3y\,\tilde{D}(12) \quad \text{med} \quad \tilde{D}(12) = 3(\hat{s}_1\hat{k})(\hat{s}_2\hat{k}) - \hat{s}_1\hat{s}_2$$

[Her er $\Omega=4\pi$, $d\Omega=\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ og $y=\frac{4\pi}{9}\beta\rho m^2$.]

Ved integrering finnes "multiplikasjonstabellen"

$$DD = \tfrac{1}{3}(D+2\Delta) \quad , \quad D\Delta = \tfrac{1}{3}D \quad \text{og} \quad \Delta\Delta=\tfrac{1}{3}\Delta$$

der $D=\tilde{D}(12)$ og $\Delta=\tilde{\Delta}(12)=\hat{s}_1\hat{s}_2$, og DD betyr $\int \tilde{D}(13)\tilde{D}(32)\frac{d\Omega_3}{\Omega}$ osv.

Innfør $J_1=D+\Delta$ og $J_2=-D+2\Delta$. Finn den tilsvarende "multiplikasjonstabellen" for J_1 og J_2 .

Hva blir $\tilde{v}(12)$ uttrykt ved J_1 og J_2 ?

Beregn til slutt $\tilde{K}(12)$.