Løsning: Eksamen 27/8-1980.

Oppgave 1.

Partisjonsfunksjonen:

$$Z = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} e^{-\beta H}$$

Magnetiske moment finnes ved å derivere m.h.p. $\mathcal{H}$:

$$m = \langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{N}\frac{Z'}{Z} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \lambda}{\partial \mathcal{H}} = \frac{\sinh(\beta\mathcal{H}) + \frac{\sinh(\beta\mathcal{H})\cosh(\beta\mathcal{H})}{\sqrt{\quad}}}{\quad}$$

$$= \frac{\sinh(\beta\mathcal{H})}{\sqrt{\sinh^2(\beta\mathcal{H}) + e^{-4\beta J}}}$$

$$\left(\frac{\partial m}{\partial \mathcal{H}}\right)_\beta = \beta\frac{\cosh(\beta\mathcal{H})}{\sqrt{\quad}} - \frac{\sinh^2(\beta\mathcal{H})\cosh(\beta\mathcal{H})}{(\sqrt{\quad})^3}$$

$$= \frac{\beta e^{-4\beta J}\cosh(\beta\mathcal{H})}{\left(\sinh^2(\beta\mathcal{H}) + e^{-4\beta J}\right)^{3/2}}$$

Energi $\langle H \rangle$ finnes ved å derivere m.h.p. β ($\mathcal{H}=0$):

$$\langle H \rangle = -\frac{1}{Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)_{\mathcal{H}} = -N\frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = -NJ\frac{\sinh(\beta J)}{\cosh(\beta J)}$$

da $\lambda = \ln[2\cosh(\beta J)]$ for $\mathcal{H} = 0$.

Oppgave 2a

Finner først z som potensrekke i ρ fra Mayers 2. ligning, dvs.

$$z = \rho - 2\bar{b}_2 z^2 - 3\bar{b}_3 z^3 - \dots$$

til ρ: $z = \rho$

til ρ^2: $z = \rho - 2\bar{b}_2\rho^2$

til ρ^3: $z = \rho - 2\bar{b}_2(\rho^2 - 4\bar{b}_2\rho^3) - 3\bar{b}_3\rho^3 = \rho - 2\bar{b}_2\rho^2 + (8\bar{b}_2^2 - 3\bar{b}_3)\rho^3$

Innsatt for z i Mayers 1. ligning:

$$\frac{p}{kT} = z + \bar{b}_2 z^2 + \bar{b}_3 z^3 + \dots = \rho - \bar{b}_2\rho^2 + (4\bar{b}_2^2 - 2\bar{b}_3)\rho^3$$

dvs.

$$\underline{\underline{B_2 = -\bar{b}_2}}, \qquad \underline{\underline{B_3 = 4\bar{b}_2^2 - 2\bar{b}_3}}$$

Oppgave 2b

Uttrykker $\bar{b}_l$ diagrammatisk. $l!\,\bar{b}_l$ er sum av alle sammenhengende grafer med l nummererte punkter. En irredusibel graf kan ikke gjøres usammenhengende ved å fjerne ett punkt

$$b_2 = \frac{1}{2!V}\,\circ\!\!-\!\!\circ \;\Rightarrow\; 2!\,\bar{b}_2 = \bullet\!\!-\!\!\bullet \;\Rightarrow\; \bar{b}_2 = \tfrac{1}{2}\,\bullet\!\!-\!\!\bullet$$

$$b_3 = \frac{1}{3!V}(\triangle + 3\,\circ\!\!-\!\!\circ\!\!-\!\!\circ) \;\Rightarrow\; 3!\,\bar{b}_3 = \triangle + 3\,\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet \;\Rightarrow\; \bar{b}_3 = \tfrac{1}{2}(\bullet\!\!-\!\!\bullet)^2 + \tfrac{1}{6}\,\triangle$$

da $\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet = (\bullet\!\!-\!\!\bullet)^2$

$$\text{dvs. } B_3 = 4\cdot\tfrac{1}{4}(\bullet\!\!-\!\!\bullet)^2 - 2\left[\tfrac{1}{2}(\bullet\!\!-\!\!\bullet)^2 + \tfrac{1}{6}\,\triangle\right] = \underline{\underline{-\tfrac{4}{3}\,\triangle}}$$

Oppgave 2c

En graf i den implisitte notasjon står for: (1) en faktor $f(r_{ij})$ for et bånd $i-j$, (2) en faktor ρ pr. punkt $\bullet$, (3) en faktor $\frac{1}{s}$, hvor s er symmetritallet, (4) en integrasjon over alle punkter untatt ett.

Grafens symmetritall er antall permutasjoner av merkete grafpunkter som gir samme graf. Osv.!

Symmetritall: $s=2$ for 

$s=6$ for 

Oppgave III

„Multiplikasjonstabellen" for $\mathcal{J}_1$ og $\mathcal{J}_2$ blir:

$$\mathcal{J}_1\mathcal{J}_1 = (D+\Delta)(D+\Delta) = DD + 2D\Delta + \Delta\Delta =$$
$$\tfrac{1}{3}[D+2\Delta+2D+\Delta] = D+\Delta = \underline{\underline{\mathcal{J}_1}}$$

$$\mathcal{J}_2\mathcal{J}_2 = (-D+2\Delta)(-D+2\Delta) = DD - 4D\Delta + 4\Delta\Delta =$$
$$= \tfrac{1}{3}(D+2\Delta-4D+4\Delta) = -D+2\Delta = \underline{\underline{\mathcal{J}_2}}$$

$$\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 = (D+\Delta)(-D+2\Delta) = -DD + D\Delta + 2\Delta\Delta =$$
$$\tfrac{1}{3}(-D-2\Delta+D+2\Delta) = \underline{\underline{0}}$$

Fra definisjonen av $\mathcal{J}_1$ og $\mathcal{J}_2$ finnes ved løsning av likningene:

$$D = \tfrac{1}{3}(2\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2) \quad \text{og} \quad \Delta = \tfrac{1}{3}(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2)$$

Uttrykt ved $\mathcal{J}_1$ og $\mathcal{J}_2$

$$\underline{\underline{\rho\tilde{v}(12) = -2y\mathcal{J}_1 + y\mathcal{J}_2}}$$

$\tilde{K}(12)$ må ha formen $\rho\tilde{K}(12) = a\mathcal{J}_1 + b\mathcal{J}_2$ som innsatt i definisjonslikningen og bruk av „multiplikasjonstabellen" gir:

$$a\mathcal{J}_1 + b\mathcal{J}_2 = -2y\mathcal{J}_1 + y\mathcal{J}_2 + (-2ya)\mathcal{J}_1 + ya\mathcal{J}_2$$

eller $\quad a = \dfrac{-2y}{1+2y} \quad$ og $\quad b = \dfrac{y}{1-y}$

Altså: $\rho\tilde{K}(12) = (a-b)D + (a+2b)\Delta = \underline{\underline{\dfrac{1}{(1-y)(1+2y)}\left[-3y\tilde{D}(12) + 6y^2\tilde{\Delta}(12)\right]}}$

Alternativt (da $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 = 0$, $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_1$ og $\mathcal{J}_2\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_2$)

$$\rho\tilde{K}(12) = \sum_{n=1}^{\infty}(-3yD)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-2y)^n\mathcal{J}_1 + \sum_{n=1}^{\infty}y^n\mathcal{J}_2 = \frac{-2y}{1+2y}\mathcal{J}_1 + \frac{y}{1-y}\mathcal{J}_2$$