UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
F.aman J.S.Høye
Tlf. 3654

EKSAMEN I FAG 71545 TEORETISK FYSIKK, SÆRKURS A

Tirsdag 30.august 1983
kl.0900-1400

Oppgave 1

Betrakt Isingkjeden (i 1 dim) med nærmeste nabo vekselvirkning og magnetfelt $\mathcal{H}$, dvs. energifunksjon

$$H = - J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} - \mathcal{H} \sum_{i=1}^{N} \sigma_i$$

Her er det hensiktsmessig med periodiske grensebetingelser $\sigma_{N+1} = \sigma_1$ slik at kjeden danner en ring. Partisjonsfunksjonen

$$Z = \sum_{\sigma_1=-1,1} \ldots \sum_{\sigma_N=-1,1} e^{\beta J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} + \beta \mathcal{H} \sum_{i=1}^{N} \sigma_i}$$

kan da skrives

$$Z = \sum_{\sigma_1} \ldots \sum_{\sigma_N} V_{\sigma_1 \sigma_2} V_{\sigma_2 \sigma_3} \ldots V_{\sigma_{N-1} \sigma_N} V_{\sigma_N \sigma_1}$$

der $V_{\sigma_i \sigma_j} = e^{\beta J \sigma_i \sigma_j + \frac{1}{2}\beta \mathcal{H} (\sigma_i + \sigma_j)}$

kan oppfattes som elementær i en 2x2 matrise V .

$$V = \begin{pmatrix} V_{1,1} & V_{1,-1} \\ V_{-1,1} & V_{-1,-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\beta J + \beta \mathcal{H}} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J - \beta \mathcal{H}} \end{pmatrix}$$

a) Vis at $Z = \mathrm{Tr}(V^N) = \lambda_+^N + \lambda_-^N$

der λ_+ og λ_- er egenverdiene til V og $\mathrm{Tr}(A) = \sum_i A_{ii}$.

forts.

Hva blir $\frac{1}{N} \ln Z$ når $N \to \infty$ og $\lambda_+ > |\lambda_-|$?

b) Beregn egenverdiene til matrisen V . Finn deretter magnetiseringen $m = \langle\sigma_i\rangle$ (for $N \to \infty$) .

Oppgave 2

Helmholtz fri energi i et visst område for en magnet kan skrives som

$$F = a_0 + a_2(T-T_0)M^2 + a_4M^4 + a_6M^6$$

der a_0, a_2, a_4, a_6 og T_0 er konstanter slik at $a_2 > 0$, $a_6 > 0$ og $T_0 > 0$. Ved å derivere F med hensyn på M finnes magnetfeltet $\mathcal{H}$. Hvordan kan en bestemme systemets kritiske punkt?

Med den gitte F har systemet kritisk punkt $T = T_c$ og $M = M_c$. Bestem T_c og M_c når $a_4 > 0$ og når $a_4 < 0$.

For små avvik fra kritisk punkt kan $\mathcal{H}$ rekkeutvikles i det lille avviket $\Delta M = M - M_c$. Dvs. en finner

$$\mathcal{H} = C_0 + C_1\Delta M + C_2(\Delta M)^2 + C_3(\Delta M)^3 + \ldots .$$

Bestem koeffisientene C_1, C_2 og C_3 . [Hint: C_n kan uttrykkes som $C_n = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n \mathcal{H}}{\partial M^n}$ for $M = M_c$].

For $T < T_c$ har systemet faseovergang som kan bestemmes ved at regelen om like arealer eller Maxwell-konstruksjon benyttes i et $M\mathcal{H}$-diagram. Bestem så ΔM for de to fasene i likevekt for T nær T_c .
Hva er den tilhørende kritiske indeks β ?
Hva er så den kritiske indeks δ for den kritiske isotermen $\mathcal{H} = \mathcal{H}(M)$ for $T = T_c$?

Oppgave 3

For et spinn system i null magnetfelt finnes følgende transformasjonslikninger for koplingskonstantene K_1 og K_2 ved en Wilson transformasjon (spinn-celle transformasjon)

$$K_1' = 4K_1+12K_2-12K_1K_2-36K_2^2$$
$$K_2' = 2K_2-36K_2^2$$

Bestem transformasjonens ikke-trivielle fikspunkt (dvs. $K_1 \neq 0$, $K_2 \neq 0$). Ifølge Kadanoffs argumenter vil cellesystemet ha en effektiv temperatur (avvik fra kritisk temperatur) $t' = L^y t$. Hva blir y når $L=2$?

Hva er en relevant egenverdi? Er antall relevante egenverdier i dette tilfellet som en burde forvente?