Forslag til Løsning. 12/1-83

Oppgave 1.

U er indre energi [bortsett fra energi p.g.a. magnetfelt]
M er magnetisering
S er entropi
δU, δM og δS er avvik av vilkårlig størrelse
fra likevektsverdiene til U, M og S.
$\mathcal{H}_0$ og T_0 er henholdsvis magnetfelt og temperatur
i likevekt (definert av omgivende reservoir).

Med $F = U - TS$ finnes

$$\delta F = \delta U - T_0 \delta S - S_0 \delta T - \delta T \delta S$$

for endelige avvik. Eliminering av δU gir

$$\underline{\underline{\delta F \geq -S_0 \delta T + \mathcal{H}_0 \delta M - \delta T \delta S}}$$

Rekkeutvikling:

$$\delta F = F_T \delta T + F_M \delta M + \frac{1}{2}\left(F_{TT} \delta T^2 + 2F_{TM} \delta T \delta M + F_{MM} \delta M^2\right) + \dots$$

$$\delta S = S_T \delta T + S_M \delta M + \dots$$

der $F_T = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_M$, $F_{TT} = \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$, $F_{TM} = \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial M}$ etc.

For små avvik gjelder

$$dF = -S\,dT + \mathcal{H}\,dM$$

slik at $S_0 = -F_T$ og $\mathcal{H}_0 = F_M$

derav videre $S_T = -F_{TT}$ og $S_M = -F_{MT}$

Alt i alt finnes da ved innsetting for δF og δS
stabilitetskravet

$$\tfrac{1}{2}\left(F_{MM}\,\delta M^2 - F_{TT}\,\delta T^2\right) \geq 0$$

Siden δM og δT er uavhengige kan en da slutte at

$\underline{\underline{F_{MM} \geq 0}}$ og $\underline{\underline{F_{TT} \leq 0}}$ mens F_{TM} kan være vilkårlig

Ved å skrive som Jacobideterminant finner en

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial M}\right)_S = \frac{\partial(\mathcal{H},S)}{\partial(M,S)} = \frac{\partial(\mathcal{H},T)}{\partial(M,T)}\,\frac{\partial(\mathcal{H},S)}{\partial(\mathcal{H},T)}\,\frac{\partial(M,T)}{\partial(M,S)} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial M}\right)_T \frac{C_{\mathcal{H}}}{C_M}$$

da $C_{\mathcal{H}} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\mathcal{H}}$ og $C_M = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M$

Oppgave 2.

Magnetfeltet er gitt ved

$$\mathcal{H} = \left(\frac{\partial F}{\partial M}\right)_T = 2a_2(T-T_0)M + 4a_4 M^3 + 6a_6 M^5$$

Kritisk punkt bestemmes ved at isotermen skal være horisontal i dette punktet. Videre må kritisk punkt være vendepunkt for isotermen for at isotermen ikke skal få negativ helning.

For kritisk punkt finner en således

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial M} = 2a_2(T-T_0) + 12a_4 M^2 + 30a_6 M^4 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial M^2} = 24a_4 M + 120a_6 M^3 = 0$$

For $a_4 > 0$: $\underline{\underline{M_c = M = 0}}$ og $\underline{\underline{T_c = T = T_0}}$

For $a_4 < 0$ vil $M_c = 0$ og $T_c = T_0$ være ustabilt $\left(\frac{\partial^3 \mathcal{H}}{\partial M^3} \leq 0\right)$, men en finner isteden

$$\underline{\underline{M_c = M = \pm\sqrt{-\frac{a_4}{5a_6}}}} \quad \text{(dvs. 2 kritiske punkt)}$$

$$T_c = T = T_0 - \frac{1}{a_2}\left(6a_4M^2 + 15a_6M^4\right)$$

$$= T_0 - \frac{1}{a_2}\left(-\frac{6}{5}\frac{a_4^2}{a_6} + \frac{15}{25}\frac{a_4^2}{a_6}\right) = \underline{\underline{T_0 + \frac{3}{5}\frac{a_4^2}{a_2 a_6}}} \quad (> T_0)$$

For $a_4 > 0$ har en $\Delta M = M$ og rekken for $\mathcal{H}$ blir som funnet foran. Dvs.

$$C_1 = 2a_2(T - T_0)\ , \ C_2 = 0 \text{ og } C_3 = 4a_4$$

P.g.a. symmetrien gir like arealer at $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 = C_0$ ved koeksistens. Følgelig

$$C_1 \Delta M + C_3 (\Delta M)^3 = 0$$

$$\Delta M = \pm\sqrt{-\frac{C_1}{C_3}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{a_2}{2a_4}(T_0 - T)}}}$$

. For $a_4 < 0$ finnes:

$C_2 = 0$ fremdeles da $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial M^2} = 0$ på kritisk pkt., og den endrer seg ikke med temperaturen.

$$C_1 = 2a_2(T - T_0) + 12a_4M^2 + 30a_6M^4 = \underline{\underline{2a_2(T - T_c)}}$$

$$C_3 = \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 \mathcal{H}}{\partial M^3} = \frac{1}{6}\left(24a_4 + 360a_6M^2\right) = 4a_4 + 60a_6\left(-\frac{a_4}{5a_6}\right)$$

$$= \underline{\underline{-8a_4}} \quad (> 0)$$

$$\Delta M = \pm\sqrt{-\frac{C_1}{C_3}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{a_2}{-4a_4}(T_c - T)}}}$$

$$\Delta M \sim (T_c - T)^\beta$$

dvs. kritisk indeks $\underline{\underline{\beta = 1/2}}$ (uavhengig av $a_4 \gtrless 0$)

På kritisk isoterm er $C_1 = 0$ og $C_2 = 0$ slik at

$$\mathcal{H} - C_0 = C_3 (\Delta M)^3 \sim \Delta M^\delta \qquad (C_3 > 0)$$

dvs. kritisk indeks $\underline{\underline{\delta = 3.}}$

Oppgave 3.

Med $\lambda^{a_r} r = 1$ sees:

$$\Gamma(r,t) = r^{1/a_r}\,\Gamma(1, r^{-a_t/a_r} t)$$

Γ kan da skrives på formen

$$\Gamma(r,t) = \frac{1}{r^{-1/a_r}} f(x) \quad \text{med } x = r|t|^{-a_r/a_t}$$

(med forskjellig f for $t>0$ og $t<0$)

f er en eller annen funksjon av x.

Eventuelt:

$$\Gamma(r,t) = t^{+1/a_t} h(x)$$

På kritisk punkt: $t \to 0 \Rightarrow x \to 0$ og $f(0)$ må være endelig.

$$\Gamma(r,0) \sim \frac{1}{r^{-1/a_r}} \propto \frac{1}{r^{d-2+\eta}}$$

$$\underline{\eta = 2 - d - 1/a_r}$$

Korrelasjonslengden ξ er gitt ved $\xi = r$ for konstant x, dvs. $\xi|t|^{-a_r/a_t} = \text{konst.}$ eller

$$\xi \propto |t|^{a_r/a_t} \propto \begin{cases} t^{-\nu} & \text{for } t>0 \\ |t|^{-\nu'} & \text{for } t<0 \end{cases} \qquad \underline{\nu = \nu' = -a_r/a_t}$$

Fluktuasjonsteoremet:

$$\chi = \beta \sum_{\vec{r}} \Gamma(\vec{r},t) \propto \sum_{\vec{r}} \Gamma(\vec{r},t) \sim \int \Gamma(r,t)\, d^d r$$

$$\sim \int \frac{1}{r^{-1/a_r}} f(x)\, d^d r \sim |t|^{\left(d\frac{a_r}{a_t} + \frac{1}{a_t}\right)} \int x^{1/a_r} f(x)\, d^d x \sim |t|^{\frac{1}{a_t}(da_r + 1)}$$

$$\sim \begin{cases} t^{-\gamma} & \text{for } t>0 \\ |t|^{-\gamma'} & \text{for } t<0 \end{cases} \qquad \underline{\gamma = \gamma' = -\frac{1}{a_t}(da_r + 1)}$$

(Bare for dr. ing. stud.)

Oppgave 4.

Fikspunktet er gitt ved $K_1' = K_1 = K_1^*$ og $K_2' = K_2 = K_2^*$

Andre likning gir da:

$$K_2^* = 2K_2^* - 36 K_2^{*2} \quad \text{dvs: } \underline{K_2^* = \frac{1}{36}}$$

Første likning:

$$K_1^* = 4K_1^* + 12K_2^* - 12K_1^*K_2^* - 36K_2^{*2}$$

$$= 4K_1^* - \frac{1}{3}K_1^* + \frac{1}{3} - \frac{1}{36} \quad \text{dvs. } \underline{K_1^* = -\frac{3}{8}\frac{11}{36} = -\frac{11}{96}}$$

Linearisering om fikspunktet gir matrisen:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_1'}{\partial K_1} & \frac{\partial K_1'}{\partial K_2} \\ \frac{\partial K_2'}{\partial K_1} & \frac{\partial K_2'}{\partial K_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 12K_2^* & 12 - 12K_1^* - 72K_2^* \\ 0 & 2 - 72K_2^* \end{pmatrix}$$

Denne matrisen har egenverdiene:

$$\lambda_1 = 4 - 12K_2^* = 10/3$$

og $\lambda_2 = 2 - 72K_2^* = 0$

(bestemt av $\det(M - \lambda I) = 0$ med I lik identitetsmatrisen)

λ_1 som er den relevante egenverdien bestemmer y ved $t' = \lambda_1 t = L^y t$, dvs

$$y = \frac{\ln \lambda_1}{\ln L} = \frac{\ln(11/3)}{\ln 2} = 1.87 \cdots$$

En relevant egenverdi er en egenverdi som er større enn 1. I det her tilfellet har en 1 relevant egenverdi som er det en burde forvente fordi problemet har bare temperaturen som relevant fysisk parameter da magnetfeltet er lik 0.