UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
F.aman. F. Bakke
Tlf. 3649

EKSAMEN I FAG 71545 TEORETISK FYSIKK - VIDEREGÅENDE KURS A - FELTMEKANIKK

Torsdag 23. januar 1986

kl.0900-1500

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung.
Ikke kalkulatorer.

Oppgave I

a) Vis hvordan en fra et variasjonsprinsipp

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L}(\psi_a, \partial_\mu \psi_a, x^\mu) d^4x = 0$$

finner feltlikningene for et felt med n komponenter ψ_a $(a=1,2,\ldots.n)$.

b) For et elektron i et ytre elektromagnetisk felt med potensial $A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right)$ kan en bruke Lagrange-tettheten

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi}\, c\left[\gamma^\mu\left(\frac{\hbar}{i}\, \partial_\mu - eA_\mu\right)\psi - mc\psi\right] + \frac{1}{2}\, c\left[\gamma^\mu\left(-\frac{\hbar}{i}\, \partial_\mu - eA_\mu\right)\bar{\psi} - mc\bar{\psi}\right]\psi \quad .$$

Finn feltlikningen for elektronets tilstandsfunksjon ψ .

Her er $\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0$ og γ^μ er de konstante Dirac-matrisene.

c) Anta ovenfor at A^μ ikke avhenger eksplisitt av tiden og finn en lokal bevarelses-setning for elektronfeltets energitetthet.

Oppgave II

a) Finn bevegelseslikningene for en punktpartikkel med koordinatene x^k fra variasjonsprinsippet

$$\delta S = \delta \int L(x^k, \dot{x}^k, t)\, dt = 0$$

b) Det infinitesimale intervall i et kulesymmetrisk gravitasjonsfelt er gitt ved

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

Anta at ε er liten og finn i ikke-relativistisk grense bevegelseslikningen for en liten masse m i dette feltet. Bestem ε slik at denne likningen gir partikkelens bevegelse i det newtonske gravitasjonsfelt rundt en stor masse M hvor gravitasjonspotensialet er $\Phi(r) = -\frac{GM}{r}$.

c) En klokke befinner seg i ro på stedet $\vec{r}$ $(r>0)$ i feltet gitt i b). Finn egentiden $\Delta\tau$ som klokken måler for en hendelse på stedet $\vec{r}$ som tar tiden Δt regnet i koordinat-tid. Hvordan varierer $\Delta\tau$ med avstanden til origo når Δt er fast? (Δt regnes infinitesimal liten).

Et atom i ro i $\vec{r}_1$ sender ut lysbølger med egenfrekvens $\nu_1 = \frac{1}{\Delta\tau_1}$. De oppfanges av en mottaker i ro i $\vec{r}_2$. Alle lysbølgene bruker samme koordinat-tid $(t_2 - t_1 = \text{konstant})$ på å gå fra $\vec{r}_1$ til $\vec{r}_2$ slik at koordinattiden Δt mellom to nærliggende bølgetopper er den samme ved utsendelsen i $\vec{r}_1$ som ved mottakelsen i $\vec{r}_2$ $(\Delta t_1 = \Delta t_2)$.
Finn egenfrekvensen som mottakeren måler.
Hvor stor blir den relative frekvensforandring $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1}$ når en antar at gravitasjonsfeltet er svakt og at $\Delta r = r_1 - r_2 << r_1$?