Eksamen i 715 60 Teoretisk fysikk IIIB

Tirsdag 1. juni 1971

kl. 9 - 15

I

Hva er den fysiske tydning av parfordelingsfunksjonen $n_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2;T,V,N)$? Finn et uttrykk for denne ut fra den kanoniske fordeling, og beregn n_2 for en ideell gass.

For et system av partikler med parvekselvirkningspotensialet $\varphi(r)$ er virialutviklingen (tetthetsutviklingen) av $\overline{n}_2(r_{12})$ gitt ved summen av alle irredusible grafer med to rotpunkter. Hva betyr "irredusibel" her? Skriv opp $\overline{n}_2(r_{12})$ til og med tredje orden i tettheten ρ v.h.a. grafer.

Når parfordelingsfunksjonen er kjent kan tilstandslikningen $p = p(\rho,T)$ beregnes på to måter, enten via fluktuasjonsteoremet

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = \frac{kT}{1+\rho^{-1}\int[\overline{n}_2(r)-\rho^2]d\vec{r}}$$

eller via virialteoremet

$$p = kT\rho - \frac{1}{6}\int r\,\varphi'(r)\,\overline{n}_2(r)d\vec{r} \quad .$$

Vis at begge relasjoner gir samme uttrykk for trykket til annen orden i tettheten ρ .

Virialutviklingen av tilstandslikningen for systemet kan formuleres slik:

$$\frac{p}{kT} = \rho + \left(1-\rho\,\frac{\partial}{\partial\rho}\right) \quad \text{(summen av alle umerkede stjerner).}$$

Forklar hva en stjernegraf er, og hva en stjernegraf representerer i denne implisitte notasjon.

Vis også at det ovenfor utledede uttrykk for p til orden ρ^2 er i overensstemmelse med den direkte virialutvikling.

Anta at det frastøtende parpotensial har formen

$$\varphi(r) = a\gamma^3 e^{-\gamma r} \quad ,$$

der γ er en liten parameter. Vis hvordan en med utgangspunkt i virialutviklingen kan beregne tilstandslikningen til laveste orden, $\mathcal{O}(\gamma^0)$, i parameteren γ.

Vis tilslutt at samme resultat kan finnes fra virialteoremet. (Innfør ny integrasjonsvariabel $R = \gamma r$).

II

Tilstandslikningen for en ferromagnet i nærheten av det kritiske punkt kan representeres ved

$$M = \begin{cases} r\mathcal{H}^a t^{-b} \exp\left[-s\sqrt{\ln^2(\mathcal{H}t^{-u})+v^2}\right] & \text{for } t > 0 \\ q|t|^c + r\mathcal{H}^a|t|^{-b} \exp\left[-s\sqrt{\ln^2(\mathcal{H}|t|^{-u})+w^2}\right] & \text{for } t < 0 . \end{cases}$$

Her er M magnetiseringen, $\mathcal{H}$ det ytre magnetfelt (forutsatt > 0), $t = T-T_c$ er temperaturavviket fra den kritiske temperatur T_c, og a,b,c,q,r,s,u,v og w er reelle positive konstanter. I uttrykket skal den positive kvadratrot velges.

De kritiske indekser $\gamma, \gamma', \delta, \beta, \alpha$ og α' er definert ved følgende asymptotiske uttrykk i nærheten av det kritiske punkt:

Susceptibilitet i null felt: $\chi = \lim_{\mathcal{H}\to 0} \left(\frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}}\right)_T = \begin{cases} \text{konst. } t^{-\gamma} & (t > 0) \\ \text{konst. } |t|^{-\gamma'} & (t < 0) \end{cases}$

Kritisk isoterm: $\mathcal{H}(t\to 0) \sim \text{konst. } M^{\delta}$

Spontan magnetisering: $M(\mathcal{H}\to 0) \sim \text{konst. } |t|^{\beta}$ $\quad (t < 0)$

Varmekapasitet i null felt: $C_{\mathcal{H}\to 0} \sim \begin{cases} \text{konst. } t^{-\alpha} & (t > 0) \\ \text{konst. } |t|^{-\alpha'} & (t < 0) \end{cases}$

Samtlige konstanter (betegnet konst.) forutsettes endelige.

a) Vis at følgende relasjoner må være oppfylt:

$$s = 1-a$$
$$u = b/(1-a) ,$$

og beregn de kritiske indekser γ, γ', β og δ, uttrykt ved a og b.

b) Den oppgitte tilstandslikning er en relasjon mellom de termodynamiske størrelser M, $\mathcal{H}$ og t. For én bestemt verdi av c (uttrykt ved a og b) vil tilstandslikningen kunne skrives som en relasjon $y = f(x)$ mellom to størrelser x og y, der x er en kombinasjon av $\mathcal{H}$ og t mens y er en kombinasjon av M og t. For hvilken verdi av c er dette mulig?

c) Gibbs funksjon G er en funksjon av to variable, $\mathcal{H}$ og t. Anta at nær det kritiske punkt kan relasjonen mellom G, $\mathcal{H}$ og t skrives som en relasjon, $z = g(x)$, mellom to størrelser x og z, der x er samme kombinasjon av $\mathcal{H}$ og t som ovenfor, og $z = Gt^{-2ab/(1-a)}$. (c har samme verdi som funnet under punkt b).

Bestem ved hjelp av dette de kritiske indekser α og α' uttrykt ved a og b.

d) Beregn de numeriske verdier av de kritiske indekser når $a = 3/5$ og $b = 2/3$. De kritiske indekser vil i dette tilfelle følge skalalovene. Hvorfor?

Oppgitt: $M = -\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial G}{\partial \mathcal{H}}\right)_T$

$C_{\mathcal{H}} = -T\left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}\right)_{\mathcal{H}}$