Eksamen i Teoretisk fysikk IIIB 1.6.1971

LØSNINGER.

I

Fysisk betydning: $n_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2;TVN)\,d^3r_1\,d^3r_2$ = sannsynligheten etc..

$$n_2(\vec{r}_1\vec{r}_2;\ldots) = N(N-1)\,\frac{\int e^{-\beta\sum_{i<j}\varphi(r_{ij})}\,d^3r_3\ldots d^3r_N}{\int \quad - \shortparallel - \quad d^3r_1\ldots d^3r_N}\,.$$

$$n_2^{\text{ideell gass}} = \frac{N(N-1)}{V^2}\,.$$

Irredusibel: Grafen er en stjerne om rotpunktene forbindes. [Kan ikke deles i to usammenhengende deler ved å fjerne et punkt, om rotpunktene forbindes]

$$\bar{n}_2(r_{12}) = \circ\ \ \circ + \circ\!-\!\circ + \circ\!-\!\bullet\!-\!\circ + \triangle + O(\rho^4)$$

$\boxed{\text{Til annen orden}}$: $\quad \bar{n}_2(r) = \rho^2 + \rho^2 f(r). \qquad f(r) = e^{-\beta\varphi(r)} - 1\,.$

Fluktuasjonsteoremet

$$\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T = \frac{kT}{1+\rho\int f(r)\,d^3r} = \underline{kT\left(1-\rho\int f(r)\,d^3r\right)} \quad \text{til } O(\rho)$$

Virialteoremet:

$$p = kT\left[\rho - \frac{4\pi}{6}\rho^2\int_0^\infty r^3\,dr\,\varphi'(r)\,e^{-\beta\varphi(r)}\right] \underset{\text{delvis int.}}{=}$$

$$= kT\left[\rho - \frac{4\pi}{6}\rho^2\int_0^\infty 3r^2\,dr\left(e^{-\beta\varphi(r)}-1\right)\right] = \underline{kT\left[\rho - \frac{\rho^2}{2}\int f(r)\,d^3r\right]}$$

som gir samme $(\partial p/\partial\rho)_T$ som fluktuasjonsteoremet.

En stjernegraf kan ikke deles i 2 usammenhengende deler ved å fjerne et punkt. I den implisitte notasjon står den for: (i) en faktor $f(r_{ij})$ for et bånd $\overset{}{\underset{i\quad j}{—}}$ (ii) en faktor ρ pr. punkt $\bullet$, (iii) en faktor S^{-1}, S = symmetritallet, og (iv) en integrasjon over alle punkt unntatt ett.

Til annen orden:

$$\frac{p}{kT} = \rho + \left(1-\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\bullet\!-\!\bullet = \rho + \left(1-\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\frac{\rho^2}{2}\int f(r)\,d^3r = \underline{\rho - \frac{\rho^2}{2}\int f(r)\,d^3r} \text{ som over.}$$

Potensialet $\quad \underline{\varphi(r) = a\,\gamma^3 e^{-\gamma r}}$:

Etter en argumentasjon som gir alle stjerner (unntatt $\bullet\!-\!\bullet$) av $O(\gamma^m)$, $m \geq 3$, fordi # bånd er minst 1 mer enn antall integrasjoner gjenstår

$$\lim_{\gamma\to 0}\frac{p}{kT} = \rho + \left(1-\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\bullet\!-\!\bullet = \rho + \left(1-\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\int d^3r\,\underbrace{\left[1-e^{-\beta\varphi(r)}\right]}_{\beta\varphi(r)+O(\gamma^6)}\rho^2 = \underline{\rho + 4\pi\beta a\rho^2}$$

$$p \to \underline{\underline{kT\rho + 4\pi a\rho^2}}$$

Fra virialteoremet: Enten ved å argumentere for $\bar{n}(r) \simeq \rho^2$ · utfra grafer eller slik:

$$p = kT\rho + \frac{a}{6}\int R\,e^{-R}\,\bar{n}_2\!\left(\frac{R}{\gamma}\right)d^3R \longrightarrow kT\rho + \frac{a}{6}\int Re^{-R}d^3R\;\bar{n}_2(\infty)$$

$$= kT\rho + 4\pi a\rho^2$$

a)

$t \to 0+$ gir $\quad M \to r\,\mathcal{H}^{a-s}\, t^{-b+su}$ som eksisteres bare om $\underline{b = su}$

$\mathcal{H} \to 0$ gir ($t>0$) $\quad M \to r\,\mathcal{H}^{a+s}\, t^{-b-su}$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}}\right)_T \to (a+s)\, r\, \mathcal{H}^{a+s-1}\, t^{-b-su}$$ som eksisteres bare om $\underline{a+s-1=0}$

Herav: $\quad s = \underline{\underline{1-a}} \quad$ og $\quad u = \frac{b}{s} = \underline{\underline{\frac{b}{1-a}}}$.

Kritiske indekser:

Av ovenstående $\mathcal{H}(t=0) \propto M^{\frac{1}{a-s}}$, $\quad$ ⟹ $\delta = \frac{1}{a-s} = \underline{\underline{\frac{1}{2a-1}}}$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}}\right)_T \overset{\mathcal{H}\to 0}{\propto} |t|^{-b-su}$$ ⟹ $\gamma = \gamma' = b+su = \underline{\underline{2b}}$

For $t<0$ og $\mathcal{H}\to 0$ er $M \propto |t|^c$ ⟹ $\beta = \underline{\underline{c}}$

b) Dividér tilstandslikningen med $|t|^c$:

$$M|t|^{-c} = \begin{cases} q + r\left(\mathcal{H}|t|^{-\frac{b+c}{a}}\right)^a e^{-s\sqrt{\ln^2(\mathcal{H}|t|^{-u})+w^2}} & t<0 \\ r\left(\mathcal{H}|t|^{-\frac{b+c}{a}}\right)^a e^{-s\sqrt{\ln^2(\mathcal{H}|t|^{-u})+v^2}} & t>0. \end{cases}$$

Høyre side er en funksjon av en variabel om

$u = \frac{b+c}{a}$ ⟹ $c = au - b = \underline{\underline{\frac{2a-1}{1-a}\, b}}$.

De variable:

$y = M|t|^{-c}$ (eller en funksjon herav)

$x = \mathcal{H}|t|^{-\frac{b}{1-a}}$ (— " —)

c) Av det oppgitte følger

$$G = |t|^{\frac{2ab}{1-a}}\, g\left(\mathcal{H}|t|^{-\frac{b}{1-a}}\right)$$

$$C_{\mathcal{H}} = -T\left(\frac{\partial^2 G}{\partial |t|^2}\right)_{\mathcal{H}} = -T\left\{ |t|^{\frac{2ab}{1-a}-2} g\left(\mathcal{H}|t|^{-\frac{b}{1-a}}\right) \frac{2ab}{1-a}\cdot\left(\frac{2ab}{1-a}-1\right)\right.$$

$$+2\,\frac{2ab}{1-a}\cdot\frac{-b}{1-a}\cdot\mathcal{H}\,|t|^{\frac{2a-1}{1-a}b-2}\, g'(\ ) +$$

$$\left. + \frac{b}{1-a}\left(\frac{b}{1-a}+1\right)\mathcal{H}\,|t|^{\frac{2ab-b}{1-a}-2}\, g'(\ ) + \left(\frac{b}{1-a}\right)^2 \mathcal{H}^2 |t|^{\frac{2a-2}{1-a}b-2}\, g''(\ )\right\}$$

$$C_{\mathcal{H}\to 0} \to -T\,\frac{2ab}{1-a}\left(\frac{2ab}{1-a}-1\right) g(0)\, |t|^{\frac{2ab}{1-a}-2}$$ ⟹ $\alpha = \alpha' = \underline{\underline{2 - \frac{2ab}{1-a}}}$

da $\left.\begin{array}{l} z g'(z) \to 0 \\ z^2 g''(z) \to 0 \end{array}\right\}$ $z \to 0$.

d) Skalalovene følger fordi relasjonen mellom G, $\mathcal{H}$ og T kan skrives som en relasjon mellom bare to uavhengige størrelser (jfr. kompendiet) [Det gir at vi får 4 likninger mellom de 6 kritiske indekser, ⟹ bare 2 er uavhengige].

$a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{2}{3}$ ⟹ $\quad \beta = \frac{1}{3}$, $\delta = 5$, $\gamma = \gamma' = \frac{4}{3}$, $\alpha = \alpha' = 0$.