nstitutt for teoretisk fysikk
niversitetet i Trondheim, NTH

Eksamen i fag 71560

Teoretisk fysikk IIIB (Kvantemek. mangepart.teori)

Onsdag 15. juni 1977

Kl. 0900 - 1600

Tillatte hjelpemidler: Regnestav, lommekalkulator, matematiske tabeller.

Oppgave 1

a) Hva er det kjemiske potensial for en fotongass (i en beholder)? Hva er fugasiteten? Finn midlere besettelsestall og total (indre) energi, og vis at relasjonen

$$\mathcal{P}\Omega = \frac{1}{3} E$$

gjelder for en fotongass.

b) La $\Omega \to \infty$ og utled Plancks strålingslov $u(\omega, T)$ for frekvens-fordeling av termisk stråling, når total energi er gitt ved

$$E = \Omega \int_0^\infty u(\omega, T) d\omega \; .$$

Vis at Plancks lov går over i Rayleigh-Jeans lov

$$u(\omega, T) = KT\omega^2 / \pi^2 c^3 \quad ,$$

for $\hbar\omega \ll KT$. Hva blir total energi hvis vi benytter Rayleigh-Jeans lov for alle frekvenser?

c) Vis at total energi i strålingshulrommet er gitt ved Stefan-Boltzmanns lov

$$U/\Omega = aT^4 \quad ,$$

der a er Stefans konstant. Finn a og tilsvarende varme-kapasitet C_Ω for fotongassen.

(Oppg.1 forts. s.2)

<u>Oppgitt:</u> $\int_0^\infty x^3(e^x-1)^{-1}\,dx = \pi^4/15$,

$Z = \prod_k (1-ze^{-\beta\varepsilon_k})^{-1}$ for bosoner,

$\langle n_k \rangle = -\beta^{-1}\,\partial(\ln Z)/\partial\varepsilon_k$,

$z = e^{\beta\mu}$

$\beta = 1/KT$,

$\mathcal{P} = -(\partial E/\partial\Omega)_S = -(\partial F/\partial\Omega)_T = \beta^{-1}(\partial \ln Z/\partial\Omega)_T$,

der z er fugasiteten, μ er kjemisk potensial, K er Boltzmanns konstant, T er temperatur, ε_k er ènpartikkelenergi, $\langle n_k\rangle$ er midlere besettelsestall, Z er den kanoniske partisjonsfunksjonen, $\mathcal{P}$ er trykket, Ω er volum, og E er total (indre) energi.

*

<u>Oppgave 2</u>

a) Finn klassisk paramagnetisme for et system av atomer i termisk likevekt i et ytre magnetfelt $\underline{B}$, dvs. finn magnetisering M (indusert magnetisk moment) og magnetisk susceptibilitet χ når hvert atom har et magnetisk moment $\underline{\gamma}$. Finn magnetisering og susceptibilitet for $\gamma B \ll KT$, og vis at vi får Curies lov. Hva blir Curie konstanten (uttrykt ved partikkel-tettheten ρ)?

b) Skriv opp Hamiltonfunksjonen for et ikke-relativistisk fritt elektron i et ytre magnetfelt $\underline{B} = \nabla\times\underline{A}$. Hvilket ledd gir diamagnetisme og hvilket ledd gir paramagnetisme? Hva blir ènpartikkelenergien når vi neglisjerer diamagnetiske effekter? Vis at partisjonsfunksjonen kan skrives

$$Z = \sum_{\{n_p^+\}\{n_p^-\}} \exp[-\beta\Sigma(n_p^+ + n_p^-)(p^2/2m) + \beta\gamma B(N_+ - N_-)] \quad ,$$

der N_+ er totalt antall partikler med spinn "opp", N_- er totalt antall partikler med spinn "ned", og n_p^+ og n_p^- er tilsvarende besettelsestall.

c) Hvis det kjemiske potensial for en ideell Fermi gass med N partikler uten spinn defineres ved

$$\mu(N) = KT\nu(N) = KT\ln z \quad ,$$

får vi betingelsen

$$KT[\nu(\overline{N}_+) - \nu(N-\overline{N}_+)] = 2\gamma B$$

for paramagnetisme, der $\overline{N}_+$ er midlere antall partikler med spinn "opp". Innfør størrelsen

$$q = 2(\overline{N}_+/N) - 1 \quad , \quad \text{der} \quad -1 \leq q \leq 1 \quad ,$$

og vis at magnetisering pr. volumenhet for høye temperaturer $(KT >> \varepsilon_F)$ er lik

$$M = \rho\gamma q = \rho\gamma \, \mathrm{Tgh}(\gamma B/KT) \quad ,$$

når ρ er partikkeltettheten og

$$\nu = \ln z \approx \ln(\rho\lambda^3)$$

for høye temperaturer $(KT >> \varepsilon_F)$, der λ er den termiske de Broglie bølgelengden. Finn tilsvarende magnetisering og susceptibilitet for $\gamma B << KT$, og sammenlign med resultatene under pkt. a).

<u>Oppgitt</u>: $M = -(\partial E/\partial B)/\Omega$,

$\chi = \partial M/\partial B$,

$\mathrm{Tgh}x \approx x$ for $x << 1$,

$\mathrm{Coth}x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{3}$ for $x << 1$,

$\lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/mKT} = h/\sqrt{2\pi mKT}$.

*

<u>Oppgave 3</u>

a) Anta at en nøytronstjerne er kuleformet med radius R og total masse M , og består av en gass av nøytroner, dvs. "neutron matter". Betrakt nøytrongassen som en ideell relativistisk Fermi gass i grunntilstanden, og finn total energi uttrykt ved M og R , dvs. ved størrelsene

$$\overline{M} = (9\pi/4m)M \quad ,$$

og

$$\overline{R} = (mc/\hbar)R \quad ,$$

for

$$x_F = p_F/mc >> 1 \quad ,$$

der p_F er Fermi impulsen og m er nøytronmassen. Vis at trykket av Fermi gassen blir

$$\mathcal{P} = (m^4c^5/12\pi^2\hbar^3)(\overline{M}^{\frac{4}{3}}/\overline{R}^4 - \overline{M}^{\frac{2}{3}}/\overline{R}^2) \quad .$$

b) Beregn gravitasjonsenergien bundet i en slik stjerne, dvs. "gravitational self-energy" (uttrykt ved M og R) når vi antar at den har en konstant massetetthet. Finn trykket p.g.a. gravitasjonskreftene, uttrykt ved $\overline{M}$ og $\overline{R}$.

c) Finn relasjonen mellom M og R, dvs. $\overline{R}$ som funksjon av $\overline{M}$, når vi antar at trykket i den relativistiske nøytrongassen balanseres av gravitasjonsbindingen. Gir svaret en øvre eller nedre grense for stjernens totale masse? Hva blir denne grenseverdien? Sett inn oppgitte tallverdier, og uttrykk grenseverdien ved solens masse $M_\odot$. Hva blir stjernens radius når

$$M = M_\odot \quad ,$$

og

$$k_F = 1.36 \text{ fm}^{-1} ?$$

*

<u>Oppgitt:</u>

$$\sqrt{1+x^2} \approx x\left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) \quad \text{for} \quad x >> 1 \quad ,$$

$$\mathcal{P} = -\partial E/\partial \Omega = (\rho^2/N)(\partial E/\partial \rho) \quad ,$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{g}^{-1} \text{sek}^{-2} \quad ,$$

$$m = 1.67 \cdot 10^{-24} \text{ g} \quad ,$$

$$\hbar = 1.05 \cdot 10^{-27} \text{ erg sek} \quad ,$$

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm sek}^{-1} \quad ,$$

$$M_\odot = 2 \cdot 10^{33} \text{ g} \quad .$$