Teor. Fys. III B

# ~~[illegible]~~ Oppgave 1. Antydet løsning

a] Partisjonsfunksjonen for en fotongass er

$$Z = \prod_k (1 - e^{-\beta\varepsilon_k})^{-1},$$

og midlere besettelsestall er gitt ved

$$\langle n_k \rangle = \sum_{n_k} n_k e^{-\beta n_k \varepsilon_k} / \sum_{n_k} e^{-\beta n_k \varepsilon_k} = (e^{\beta\varepsilon_k} - 1)^{-1},$$

dvs. $Z$ kan „fortolkes" som den store kanoniske partisjonsfunksjonen $Z_g$ og $\langle n_k \rangle$ som midlere besettelsestall for en ideell Bose gass med $\underline{\underline{\mu = 0}}$.

Fugasiteten: $\underline{\underline{z = 1}}$.

Med to polarisasjonsretninger får vi egentlig

$$\ln Z = -2\sum_k \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega_k}),$$

der impuls og énpartikkel-energi er

$$p = \hbar k = \hbar\omega/c, \qquad \varepsilon = \hbar\omega = pc.$$

Midlere besettelsestall og indre energi blir

$$\langle n_k \rangle = \underline{\underline{2(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^{-1}}} = -\tfrac{1}{\beta}\partial(\ln Z)/\partial(\hbar\omega)$$

$$E = \sum_k \hbar\omega \langle n_k \rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}(\ln Z) = \underline{\underline{\sum_k [2\hbar\omega/(e^{\beta\hbar\omega} - 1)]}}$$

Periodiske grensebetingelser i kubisk volum $\Omega = L^3$ gir: $\omega = ck = 2\pi nc/L = 2\pi nc\,\Omega^{-1/3} \propto \Omega^{-1/3}$, dvs.

$$E \propto \Omega^{-1/3}, \quad \delta E/E = -\tfrac{1}{3}\delta\Omega/\Omega, \quad \mathcal{P} = -\partial E/\partial\Omega = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}E/\Omega}}$$

eller

$$\mathcal{P} = \beta^{-1}\frac{\partial}{\partial\Omega}(\ln Z) = -\sum_k \hbar(\partial\omega/\partial\Omega)\langle n_k \rangle = \tfrac{1}{3}\Omega^{-1}\sum_k \hbar\omega\langle n_k \rangle$$

dvs. $\underline{\underline{\mathcal{P}\Omega = \tfrac{1}{3}E}}$

b] Tettheten av fotontilstander i et volum $\Omega$ er

$$g(\omega)d\omega = g(k)dk = \frac{2\Omega \cdot 4\pi k^2}{(2\pi)^3}dk = \frac{\Omega\omega^2}{\pi^2 c^3}d\omega$$

siden $k^2 dk = \frac{\omega^2 d\omega}{c^3}$, dvs.

$$E = \int \hbar\omega \langle n_k \rangle g(\omega)d\omega = \frac{2\Omega}{(2\pi)^3}\int_0^\infty 4\pi k^2 \hbar ck (e^{\beta\hbar ck} - 1)^{-1}dk$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{\Omega\hbar}{\pi^2 c^3}\right)\omega^3 (e^{\beta\hbar\omega} - 1)^{-1}d\omega = \Omega\int_0^\infty u(\omega, T)d\omega$$

dvs. Plancks strålingslov blir

$$\underline{\underline{u(\omega,T) = (\hbar\omega^3/\pi^2c^3)(e^{\hbar\omega/KT}-1)^{-1}}}$$

For $\hbar\omega \ll KT$ følger Rayleigh-Jeans lov: $\underline{\underline{u(\omega,T) = \frac{KT\omega^2}{\pi^2c^3}}}$

Total energi med Rayleigh-Jeans lov gir „ultrafiolettkatastrofe": $U = \int_0^\infty \frac{KT\Omega\omega^2}{\pi^2c^3}\,d\omega = \underline{\underline{\infty}}$

c) Stefan-Boltzmanns lov:

$$U/\Omega = \int_0^\infty u(\omega,T)\,d\omega = [(KT)^4/(\pi^2\hbar^3c^3)]\int_0^\infty x^3(e^x-1)^{-1}dx$$

når vi setter $x = \frac{\hbar\omega}{KT}$, dvs. $\omega = \frac{KT}{\hbar}x$, $d\omega = \frac{KT\,dx}{\hbar}$

Integralet er gitt ved $\int_0^\infty x^3(e^x-1)^{-1} = \pi^4/15$,

dvs. $U/\Omega = \underline{\underline{(\pi^2K^4/15\hbar^3c^3)T^4}} = aT^4$, $\underline{\underline{\text{q.e.d.}}}$

Stefans konstant: $\underline{\underline{a = \pi^2K^4/15\hbar^3c^3}}$

Varmekapasiteten: $C_\Omega = (\partial E/\partial T)_\Omega = \underline{\underline{(4\pi^2K^4/15\hbar^3c^3)T^3}}$

[redacted]

# F18. Oppgave 2. Antydet løsning

a] Hamiltonfunksjonen: $H = H_0(p,r) - \sum_{i=1}^{N} \mu_i \cdot \underline{B}$

Magnetiseringen er gitt ved

$$M = \langle -\tfrac{1}{\beta}(\tfrac{\partial H}{\partial B})\rangle = \mu N \langle \cos\theta \rangle, \quad \text{siden } \mu_i \cdot \underline{B} = \mu B \cos\theta_i$$

$\langle \cos\theta \rangle$ er altså middelverdi av en fordeling i termisk likevekt, dvs.

$$\langle \cos\theta \rangle = \int e^{-\beta U} \cos\theta \, d\Omega \Big/ \int e^{-\beta U} d\Omega$$

$$= \left(2\pi \int_0^\pi \sin\theta \cos\theta \, e^{\beta\mu B\cos\theta} d\theta\right) \Big/ \left(2\pi \int_0^\pi \sin\theta \, e^{\beta\mu B \cos\theta} d\theta\right)$$

Med nye variable

$s = \cos\theta$, $x = \mu B / KT$, får vi

$$\langle \cos\theta \rangle = \int_{-1}^{1} e^{sx} s \, ds \Big/ \int_{-1}^{1} e^{sx} ds = \frac{d}{dx}\left[\ln \int_{-1}^{1} e^{sx} ds\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{\ln \left[\tfrac{1}{x} e^{sx}\right]_{-1}^{1}\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\ln\left[\tfrac{1}{x}e^{x} - \tfrac{1}{x}e^{-x}\right]\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\ln\left[\tfrac{1}{x}(e^{x}-e^{-x})\right]\right\}$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\ln(e^{x}-e^{-x})\right] - \frac{d}{dx}\left[\ln x\right] = \coth x - \frac{1}{x},$$

dvs indusert magnetisk moment pr. volumenhet [redacted] er

$$\underline{\mathcal{M} = \mu\rho\left(\coth x - \tfrac{1}{x}\right)}$$

og tilsvarende susceptibilitet pr. volumenhet [redacted] blir

$$\chi = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial B} = \underline{(\mu^2\rho/KT)\left(\tfrac{1}{x^2} - \tfrac{1}{\sinh^2 x}\right)}$$

For $\mu B \ll KT$, dvs. $x \ll 1$, får vi $\coth x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{3}$, og

$$\underline{\underline{\mathcal{M} \approx \mu^2 B \rho / 3KT}}, \quad \underline{\underline{\chi = \mu^2 \rho / 3KT = C/T}}$$

Curie konstanten: $\underline{\underline{C = \mu^2\rho/3K}}$

b] Hamiltonfunksjonen: $\underline{H = (p \pm e\underline{A})^2/2m - \mu \cdot \underline{B}}$

(der $\mu = e\hbar/2m$ = Bohr magneton)

Det første leddet gir diamagnetisme og det siste leddet gir paramagnetisme.

Enpartikkelenergi: $\underline{\underline{\varepsilon_{ps} = p^2/2m - s\mu B}}$, der $s = \pm 1$

Total energi: $E_n = \sum_p \sum_s \varepsilon_{p,s} n_{p,s} = \sum_p \left[ (p^2/2m - \mu B) n_p^+ + (p^2/2m + \mu B) n_p^- \right]$

der $n_{p,s} = 0$ eller 1, og $\sum_s \sum_p n_{p,s} = N$

Med $\sum_p n_p^+ = N_+$ og $\sum_p n_p^- = N_- = N - N_+$, får vi

$$E_n = \sum_p (n_p^+ + n_p^-)(p^2/2m) - \mu B (N_+ - N_-)$$

Partisjonsfunksjonen er da

$$\underline{Z = \sum_{\{n_p^+\}\{n_p^-\}} \exp\left[-\beta \sum_p (n_p^+ + n_p^-)(p^2/2m) + \beta \mu B (N_+ - N_-)\right]}$$

c) Magnetisering pr. volumenhet er

$$\mathcal{M} = \mu(\bar{N}_+ - \bar{N}_-)/\Omega = \mu(2\bar{N}_+ - N)/\Omega = \underline{\rho \mu q}$$

For høye temperaturer, dvs. for $KT \gg \varepsilon_F$, er

$$\nu = \ln z \approx \ln(\rho \lambda^3), \quad \text{der } \lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mKT}} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m KT}}$$

dvs. $KT[\nu(\bar{N}_+) - \nu(\bar{N}_-)] = 2\mu B$

$$[\nu(\bar{N}_+) - \nu(\bar{N}_-)] = \ln[\rho\lambda^3(1+q)] - \ln[\rho\lambda^3(1-q)] = 2\mu B/KT$$

siden $\frac{2\bar{N}_+}{\Omega} = \frac{N(1+q)}{\Omega} = \rho(1+q)$ og $\frac{2\bar{N}_-}{\Omega} = \frac{N(1-q)}{\Omega} = \rho(1-q)$, dvs.

$$\ln\left[\frac{1+q}{1-q}\right] = 2\mu B/KT$$

$$1+q = (1-q)e^{2\mu B/KT}, \quad q = \frac{e^{2\mu B/KT} - 1}{e^{2\mu B/KT} + 1} = \underline{\mathrm{Tgh}(\mu B/KT)}$$

Magnetisering og magnetisk susceptibilitet pr. volumenhet:

$$\underline{\mathcal{M} = \rho\mu q = \rho\mu\,\mathrm{Tgh}(\mu B/KT)} \rightarrow \underline{\rho\mu^2 B/KT}$$

$$\underline{\chi = \rho\mu^2/KT}$$

siden $\mathrm{Tgh}(\mu B/KT) \approx \mu B/KT$ for $\mu B \ll KT$

# F18. Oppgave 3. Antydet løsning

a) Énpartikkelenergi (relativistisk): $\varepsilon = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$

Total energi: $E = 2\sum_{p<p_F} \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$

dvs. $E = (2\Omega/h^3)\int_0^{p_F} 4\pi p^2 \sqrt{(pc)^2+(mc^2)^2}\,dp$,

der Fermi impulsen er gitt ved

$\rho = N/\Omega = k_F^3/3\pi^2$, $\quad p_F = \hbar(3\pi^2 N/\Omega)^{1/3}$,

Innfører ny variabel: $x = p/mc$, dvs.

$E = \Omega(m^4c^5/\pi^2\hbar^3) f(x_F) = N(m^4c^5/\pi^2\hbar^3) f(x_F)/\rho$,

der $f(x_F) = \int_0^{x_F} x^2\sqrt{1+x^2}\,dx$, $\quad x_F = \frac{p_F}{mc} = \left(\frac{\hbar}{mc}\right)(3\pi^2\rho)^{1/3}$

For $x_F \gg 1$ er $f(x_F) = \frac{1}{4}x_F^4(1 + x_F^{-2} + \ldots) = \frac{1}{4}(x_F^4 + x_F^2 + \ldots)$

Stjernens masse og radius: $M = Nm$, $R = (3\Omega/4\pi)^{1/3}$,

dvs. $\rho = N/\Omega = 3M/(4\pi m R^3) = (m^3c^3/3\pi^2\hbar^3)(\bar{M}/\bar{R}^3)$,

$x_F = (\hbar/mcR)(9\pi M/4m)^{1/3} = \bar{M}^{1/3}/\bar{R}$,

der $\bar{M} = 9\pi M/4m$, $\quad \bar{R} = mcR/\hbar$.

Total energi blir: $E = \Omega(m^4c^5/\pi^2\hbar^3) f(x_F) = \underline{\underline{\left(\frac{mc^2}{3\pi}\right)(\bar{M}^{4/3}/\bar{R} + \bar{M}^{2/3}\bar{R})}}$

Trykk: $\mathcal{P} = -\partial E/\partial\Omega = -(\partial\bar{R}/\partial\Omega)(\partial E/\partial\bar{R})$

$= \underline{\underline{(m^4c^5/12\pi^2\hbar^3)(\bar{M}^{4/3}/\bar{R}^4 - \bar{M}^{2/3}/\bar{R}^2)}}$

eller: $\mathcal{P} = (\rho^2/N)(\partial E/\partial\rho)$

$= (m^4c^5/\pi^2\hbar^3)\{\rho[\partial f(x_F)/\partial x_F](\partial x_F/\partial\rho) - f(x_F)\}$

$= (m^4c^5/\pi^2\hbar^3)[\frac{1}{3}x_F^3\sqrt{1+x_F^2} - f(x_F)]$

$\approx (m^4c^5/12\pi^2\hbar^3)(x_F^4 - x_F^2) = \underline{\underline{(m^4c^5/12\pi^2\hbar^3)(\bar{M}^{4/3}/\bar{R}^4 - \bar{M}^{2/3}/\bar{R}^2)}}$

b) Bindingsenergien er bundet gravitasjonsenergi som tilsvarer arbeidet med å føre massen sammen fra relativ avstand $r = \infty$, dvs. vi bygger opp en kule ved å føre masse $dm$ inntil en kule med masse $m(r)$, og får energiforandring og masseøkning:

$$dU = -\frac{Gm(r)\,dm}{r}$$

der: $dm = 4\pi \rho_m r^2 dr$, $m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_m$, dvs.

$$dU = -\tfrac{1}{3}(4\pi)^2 \rho_m^2 G r^4 dr$$

Total energi: $U(R) = -\int^R \tfrac{1}{3}(4\pi)^2 \rho_m^2 G r^4 dr = -\frac{16}{15}\pi^2 \rho_m^2 G R^5$

dvs. $\underline{\underline{U(R) = -\frac{3GM^2}{5R}}}$, når $\underline{\underline{M = \frac{4\pi R^3 \rho_m}{3}}}$

Trykket finnes ved: $\mathcal{P} = -\frac{\partial U}{\partial \Omega} = -\left(\frac{\partial R}{\partial \Omega}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial R}\right) = \frac{3GM^2}{20\pi R^4}$

siden $\frac{\partial U}{\partial R} = -\frac{GM^2}{R^2}$, $\frac{\partial R}{\partial \Omega} = \frac{1}{4\pi R^2}$

dvs. $\underline{\underline{\mathcal{P} = \left(\frac{3G}{20\pi}\right)\left(\frac{4m}{9\pi}\right)^2\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^4 (\bar{M}^2/\bar{R}^4)}} = \underline{\underline{(4Gm^6c^4/135\pi^3\hbar^4)(\bar{M}^2/\bar{R}^4)}}$

**c** Likevektsbetingelsen blir nå

$$C(\bar{M}^{4/3}/\bar{R}^4 - \bar{M}^{2/3}/\bar{R}^2) = C'\bar{M}^2/\bar{R}^4,$$

der $\underline{C = m^4c^5/12\pi^2\hbar^3}$

$$C' = (3G/20\pi)(4m/9\pi)^2(mc/\hbar)^4 = \underline{4Gm^6c^4/135\pi^3\hbar^4}$$

dvs.

$$\underline{\underline{\bar{R} = \bar{M}^{1/3}\sqrt{1-(\bar{M}/\bar{M}_0)^{2/3}}}}$$

der

$$\bar{M}_0 = (C/C')^{3/2} = (45\pi\hbar c/16Gm^2)^{3/2}$$

Vi ser at $\bar{R} \to 0$ når $\bar{M} \to \bar{M}_0$, dvs

$$R \to 0 \text{ når } M \to M_0 = \frac{4m\bar{M}_0}{9\pi} = \underline{\underline{\left(\frac{4m}{9\pi}\right)\left(\frac{45\pi\hbar c}{16Gm^2}\right)^{3/2}}}$$

Innsatt tallverdier: $M_0 = 13.6 \cdot 10^{33}\,g = \underline{\underline{6.8\,M_\odot}}$

For $M = M_\odot$ og $k_F = 1.5\,fm^{-1}$:

Stjernens radius: $R = (3M/4\pi m\rho)^{1/3} = (9\pi M/4m)^{1/3} k_F^{-1} = \underline{\underline{15\,km}}$