UNIVERSITETET I TRONDHEIM, NTH
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Eksamen i fag
71560 TEORETISK FYSIKK IIIB
Tirsdag 15.mai 1979
Kl. 0900 - 1600

Tillatte hjelpemidler: Egne og xerograferte forelesningsnotater. Øvingsoppgaver med løsninger.

Oppgave 1.

Gitt Lagrangetettheten

$$\mathcal{L}_\Psi = i\Psi_R^+(\partial_0+\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla})\Psi_R + i\Psi_L^+(\partial_0-\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla})\Psi_L$$

der $\Psi_{R,L}$ er to-komponent spinorfelter, og $\vec{\sigma}$ er Pauli-matrisene

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Finn de kanonisk konjugerte impulsene Π^μ_Ψ, og Euler-Lagrange likningene for feltene $\Psi_{R,L}$.

b) Vis at den generelle løsningen til bevegelselikningen kan skrives på formen

$$\Psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[b(\vec{k})u(\vec{k})e^{-ikx} + d^+(\vec{k})v(\vec{k})e^{ikx} \right]$$

Velg normering $u^+(\vec{k})u(\vec{k}) = v^+(\vec{k})v(\vec{k}) = 1$, og gi eksplisitte uttrykk for $u_{R,L}$ og $v_{R,L}$.

c) Skriv ned den kanoniske energi-impuls tensoren for systemet, og finn totalenergien og totalimpulsen uttrykt ved fourierkoeffisientene b og d.

d) Systemet har en to-dimensjonal gruppe av indre symmetrier. Hvilken? Skriv ned de tilhørende konserverte strømmene.

Oppgave 2

Addér nå et komplekst skalarfelt til systemet, med Lagrange-tetthet

$$\mathcal{L}_\Phi = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi + \mu^2 \Phi^* \Phi - \lambda(\Phi^*\Phi)^2$$

og et koblingsledd

$$\mathcal{L}_{\Psi\Phi} = -G(\Psi_R^+ \Phi^* \Psi_L + \Psi_L^+ \Phi \Psi_R)$$

slik at den fulle Lagrangetettheten blir

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\Psi + \mathcal{L}_\Phi + \mathcal{L}_{\Psi\Phi}$$

a) Sett først $\Psi=0$ og finn energitettheten $\mathcal{H}[\Phi]$. Hvilken Φ gir lavest energi?

b) Vis at de nye leddene i Lagrangetettheten vil bevare den indre symmetrien fra oppg.1d dersom det velges passe tranformasjonslov for Φ-feltet. Hvilken?

Gjør så dette til en gaugeteori med symmetrigruppen over som gauge-gruppe, ved å innføre gaugefelter A_μ^a og addere et bidrag $\mathcal{L}_{gf}$ til Lagrangetettheten.

c) Hvor mange gaugefelter må innføres? Hva blir $\mathcal{L}_{gf}$?

d) Skriv ned et konsistent sett av kovariant deriverte D_μ^L, D_μ^R, D_μ^Φ (med to uavhengige koblingskonstanter e_R, e_L), og gi transformasjonsreglene for alle feltene under gaugetransformasjoner.

e) Vis at man ved en passe gaugetransformasjon kan oppnå en situasjon der Φ er reell og ikkenegativ. Hva blir $\mathcal{L}_\Phi(\Phi, D_\mu\Phi)$ etter denne transformasjonen?

f) Lineariser så systemet om punktet $\Psi_{R,L} = A_\mu^a = 0, \Phi = \Phi_0$ (der Φ_0 er minimum energiløsningen fra pkt.a) ved å innføre

$$\Phi_1 = \Phi - \Phi_0$$

som ny variabel og skriv ut den fulle Lagrangetettheten til og med annen orden i feltene $\Psi_{R,L}$, A_μ^a, Φ_1 .

Vis at svaret kan skrives på formen

$$\mathcal{L}_0 = \overline{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi + (\partial_\mu\Phi_1)(\partial^\mu\Phi_1) - \kappa^2\Phi_1^2$$
$$-\tfrac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)(\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu)$$
$$-\tfrac{1}{4}(\partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu)(\partial^\mu C^\nu - \partial^\nu C^\mu) + \tfrac{1}{2}M^2 C_\mu C^\mu - \mathcal{H}[\Phi_0]$$

der Ψ er et 4-komponent Dirac-felt konstruert ut av $\Psi_{R,L}$

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}I & I\\ -I & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_L\\ \Psi_R\end{pmatrix}$$

og B , C er linearkombinasjoner av A_μ-feltene. Hvilke? Gi også m, κ^2, M^2 uttrykt ved de gamle parametrene μ, λ, G, e_R, e_L.

Oppgitt:

$$\Psi_R^+(\partial_0 + \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla})\Psi_R + \Psi_L^+(\partial_0 - \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla})\overline{\Psi}_L = \Psi\gamma^\mu\partial_\mu\Psi$$

$$\Psi_R^+\Psi_L + \Psi_L^+\Psi_R = \overline{\Psi}\Psi$$

$$\overline{\Psi} = \Psi^+\gamma^0 \qquad \gamma^0 = \begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ -\vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}.$$