UNIVERSITETET I TRONDHEIM, NTH
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Eksamen i fag
715 60 TEORETISK FYSIKK SB - FELTMEKANIKK
Lørdag 31. mai 1980
kl. 0900 - 1500

Tillatte hjelpemidler: Regnestav, kalkulator og
Rottmann: Mathematische Formelsammlung.

Oppgave 1

a) Gitt Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\psi}{\partial x^k}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k} - V(x)\,\psi\psi^* - \frac{\hbar}{2i}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right), \quad k=1,2,3$$

for et kompleks felt med de to uavhengige komponentene ψ og ψ^*. Finn feltlikningene for ψ og ψ^*.

b) Utled en energi-bevarelses-likning for et vilkårlig to-komponent-felt (φ_1,φ_2) når Lagrangetettheten, $\mathcal{L}\left(\varphi_a, \frac{\partial\varphi_a}{\partial x^\mu}, x^i\right)$, ikke eksplisitt avhenger av tiden.

c) Hvilken energitetthet har feltet (ψ,ψ^*) ovenfor og hvor stor er dets totale energi når feltet har en endelig utstrekning. Hvordan stemmer dette resultatet med at energioperatoren i ikke-relativistisk kvantemekanikk er $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$?

Oppgave 2

Intervallet ds for et gravitasjonsfelt er gitt ved

$$ds^2 = \frac{r-A}{r+A}c^2dt^2 - \frac{r+A}{r-A}dr^2 - (r+A)^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) \equiv g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \,. \quad (A = \text{konst.})$$

a) Anta at A er liten og finn, i den ikke-relativistiske grense, bevegelseslikningen for en liten masse m i feltet.
Bestem A slik at denne likningen gir massens bevegelse i det

newtonske gravitasjonsfelt rundt en stor masse M hvor potensialet er $\varphi(r) = -\frac{GM}{r}$

b) Vis at den oppgitte metrikken er ekvivalent med Schwarzschild metrikken bare med en annen r-koordinat. (Med Schwarzschild-metrikken har intervallet formen

$$ds^2 = (1-\frac{\varepsilon}{r})c^2dt^2-(1-\frac{\varepsilon}{r})^{-1}dr^2-r^2(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2))$$

c) Finn ut fra virkningsintegralet $S = -mc\int ds$ bevegelses-likningene $\frac{\partial\varphi}{\partial s} = f(r)$ og $\frac{\partial t}{\partial s} = g(r)$ for baner som ligger i planet $\vartheta = \pi/2$ og hvor intervall-lengden s er brukt som baneparameter.

Utled herav banelikningen

$$\frac{du}{d\varphi} = h(u) \qquad u = \frac{1}{r+A}$$

for en slik bane.

$\left(\text{Benytt likningen } g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 1\right)$