Eksamen i

fag 71560 TEORETISK FYSIKK S B - FELTMEKANIKK

Tirsdag 9.juni 1981
kl.0900-1500

Tillatte hjelpemidler: Regnestav/kalkulator
Rottmann: Mathematische Formelsammlung.

Oppgave I

a) For et elektron i et elektromegnetisk felt har en Lagrange-tettheten

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \bar{\psi}\left[\gamma^\mu\left(\frac{\hbar}{i}\partial_\mu - eA_\mu\right) - mc\right]\psi$$

med

$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, $A^\alpha = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right)$ er det elektromagnetiske potensial

$\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0$ og γ^μ er de konstante Dirac-matrisene.

Utled herav Maxwells likninger for det elektromagnetiske felt

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \qquad \varepsilon^{\kappa\mu\nu}\partial_\kappa F_{\mu\nu} = 0$$

og Diracs likning for elektronets bølgefunksjon

$$\left[\gamma^\mu\left(\frac{\hbar}{i}\partial_\mu - eA_\mu\right) - mc\right]\psi = 0$$

og finn den elektriske strømtetthet j^ν uttrykt ved bølgefunksjonen ψ og Dirac-matrisene γ^μ .

b) Utled en energibevarelseslikning for et felt med n komponenter ϕ_a $a=1,2,3\ldots n$ når Lagrangetettheten $\mathcal{L}\left(\phi_a, \frac{\partial\phi_a}{\partial x^\mu}, x^i\right)$ ikke eksplisitt avhenger av tiden.

c) Finn energitettheten for systemet gitt ovenfor i a).

Oppgave II

a) En liten massepartikkel i et gitt gravitasjonsfelt beveger seg langs den snareste vei $\int_1^2 ds$ = ekstremalverdi.

Vis at dette gir bevegelseslikningene

$$\frac{dv^\kappa}{d\tau} + \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 0$$

hvor

$v^\kappa = \dfrac{dx^\kappa}{d\tau}$ er banehastigheten , τ er egentiden

$$\Gamma_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\right)$$

b) Intervallet ds for et gravitasjonsfelt er gitt ved

$$ds^2 = \frac{r-A}{r+A} c^2 dt^2 - \frac{r+A}{r-A} dr^2 - (r+A)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

En partikkel i dette feltet faller rett mot $r=0$ (med θ og ϕ konstante).

Sett opp bevegelseslikningen for u^0 .

Eliminer $v^1 (\equiv v^r)$ ved hjelp av $\dfrac{dg_{00}}{d\tau} = \dfrac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu} v^\mu$

og vis at løsningen blir

$$g_{00} v^0 = \text{konstant}$$

og finn herav

$$v^0 = v^0(r) \quad .$$

Benytt så intervall-likningen $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ til å finne v^1 uttrykt ved v^0 og dermed $v^1 = v^1(r)$.

Diskuter hvordan v^0 og v^1 oppfører seg når partikkelen nærmer seg koordinatsingulariteten $r=A$.