UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
F.aman.F.Bakke
Tlf. 3649

EKSAMEN I FAG 71560 TEORETISK FYSIKK SB - Feltmekanikk
Lørdag 19.mai 1984
kl.0900-1500

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator
Rottmann: Mathematische Formelsammlung

Oppgave 1

a) Et elektromagnetisk felt fra en strømtetthet $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ har 4-potensial $A^\mu = (\frac{1}{c}\phi, \vec{A})$ og feltstyrke $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

Vis hvordan feltlikningene kan avledes fra et variasjonsprinsipp

$$\delta I = \delta \int_V \mathcal{L}(A^\mu, \partial^\nu A^\mu, x^\mu)\, d^4x = 0 \quad , \quad \delta A^\mu = 0 \text{ på grensene.}$$

Utled en energi- bevarelses-setning for feltet når $\mathcal{L}$ ikke avhenger eksplisitt av tiden $x^0 = ct$.

b) Redegjør for krav som begrenser den mulige Lagrangetetthet til formen

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\mu_0}\left(a\, \partial_\mu A^\nu\, \partial^\mu A_\nu + b\, \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu + c(\partial_\mu A^\mu)^2 + d\, A_\mu A^\mu + e\mu_0 A_\mu j^\mu\right)$$

hvor a,b,c,d og e er konstanter.

Velg a=e=1 og b=c=d=0 og finn feltlikningene som da følger for potensialet A^ν.

Vis at energitettheten i dette tilfellet kan bli negativ hvis en ikke pålegger A^μ noen ekstrabetingelser. (Husk: $A_\mu A^\mu = (A_0)^2 - (\vec{A})^2$)

c) Bestem konstantene a,b,d og e (uttrykt ved c) slik at Lagrange-tettheten i punkt b) gir Maxwells likninger

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad \text{og} \quad \varepsilon^{\kappa\mu\nu}\, \partial_\kappa F_{\mu\nu} = 0 \ .$$

forts.

Velg $c=0$. Finn energitettheten og symmetriser uttrykket for den ved å legge til et ledd av formen

$$\partial_\alpha\left(\frac{1}{\mu_0} F^{\alpha\nu}A_\mu\right)$$

Vis at energitettheten her da blir positiv.

d) Vis at de to feltlikningene i pkt. b) og c) blir like når en pålegger potensialet Lorentzbetingelsen $\partial_\mu A^\mu = 0$.

Oppgave 2

Intervallet ds for et gravitasjonsfelt er gitt ved

$$ds^2 = \frac{r-A}{r+A}c^2dt^2 - \frac{r+A}{r-A}dr^2 - (r+A)^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \qquad A=\text{konst.}$$

a) Anta at A er liten og finn, i den ikke-relativistiske grense, bevegelseslikningen for en liten masse m i feltet. Bestem A slik at denne likningen gir massens bevegelse i det newtonske gravitasjonsfelt rundt en stor masse M hvor potensialet er $\phi(r) = -\frac{GM}{r}$.

b) Vis at alle baner i en kulesymmetrisk statisk geometri

$ds^2 = u(r)c^2dt^2 - v(r)dr^2 - q(r)(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)$

er plane baner. (Tips : Velg koordinataksene slik at partikkelen starter i $\theta=\frac{\pi}{2}$ med $\frac{d\theta}{d\tau}=0$ ved $\tau=\tau_0$) .

c) Finn bevegelseslikningene $\frac{d\phi}{d\sigma}=f(r)$ og $\frac{dt}{d\sigma}=g(r)$ for lysstråler som beveger seg i planet $\theta=\frac{\pi}{2}$. (σ er en baneparameter)

Finn herav banelikningen

$$\frac{du}{d\phi} = h(u) \qquad u = \frac{1}{r+A}$$

for en lysstråle.

d) Finn approksimativt lysstrålens bane når A er liten.