UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Prof.E.H.Hauge
Tlf. 3651

EKSAMEN I FAG 71564 RENORMALISERINGSTEORI I STATISTISK FYSIKK

Onsdag 15.5.1985
kl.0900-1500

Hjelpemidler: Lommeregner, Rottmann: Mathematische Formelsammlung

I

En direkteroms renormaliseringstransformasjon (RG) for et Isingsystem defineres av vektfunksjonen $P(s',s)$ og kan formelt skrives som

$$e^{G+H'(s')} = \sum_s P(s',s)\, e^{H(s)}$$

a Skisser kort (uten å gjennomføre alle detaljer) hvordan en slik RG transformasjon kan gi opphav til en generalisert homogenitets-relasjon for den fri energi, av formen

$$f(u_1,u_2,\ldots) = g(u_1,u_2,\ldots) + \frac{1}{L^d}\, f(\lambda_1 u_1\ ,\ \lambda_2 u_2,\ldots)$$

b Hvilke betingelser bør vektfunksjonen $P(s',s)$ oppfylle ?

c Vis at hyperskaleringsrelasjonen mellom de kritiske eksponentene α (for varmekapasiteten) og ν (for korrelasjonslengden) følger av RG-filosofien, uten eksplisitt spesifikasjon av $P(s',s)$.

II

En modifisert kumulanttilnærmelse gir følgende RG transformasjon (i det "like" underrommet) for koplingskonstantene K_1 (nærmeste nabo), K_2 (nest nærmeste nabo) og K_3 (3.nabo) på et triangulært gitter:

$$K_1' = (2K_1+3K_2+2K_3)\psi^2(K_1)$$

$$K_2' = \tfrac{1}{2}K_2+K_3\psi^2(K_1)$$

$$K_3' = \tfrac{1}{3}K_3$$

der

$$\psi(K_1) = \frac{e^{3K_1}+e^{-K_1}}{e^{3K_1}+3e^{-K_1}}$$

a Finn transformasjonens fikspunkter.

b Lineariser transformasjonen rundt det kritiske fikspunktet og bestem de tilhørende egenverdiene.

c Konstruer skaleringsfeltet u_t (som svarer til den termiske egenverdien) i lineær tilnærmelse, uttrykt ved $\delta K_i = K_i - K_i^*$.

d Skisser (den ikkelineære) transformasjonens flytdiagram i (K_1, K_2)-planet, med $K_3 = 0$.

III

Fjerdeordensmodellen med et énkomponent spinnfelt er karakterisert ved Hamiltonfunksjonen

$$H = H_0 + V$$

$$H_0 = \tfrac{1}{2}\int_0^1 đk\,(k^2+r)\,s(k)\,s(-k)$$

$$V = u\int_0^1 .. \int_0^1 đk_1 .. đk_4 \; s(k_1)..s(k_4)\,đ(k_1+..+k_4)$$

med

$$\int_0^\Lambda đk \ldots \equiv \int'_{(|\vec{k}|<\Lambda)} \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \ldots ; \quad đ(k) \equiv (2\pi)^d \delta(\vec{k})$$

a Gi en fysisk begrunnelse for, og skisser kort (uten å gjennomføre alle detaljer) trinnene i en RG transformasjon, $H \to H_L$, basert på at Fourierkomponenter av spinnfeltet med $|\vec{k}| > 1/L$ integreres ut.

b Adder koplingen til et lite, homogent, ytre felt, h , og beregn h_L til nullte orden i V . Hva gir dette for den magnetiske eksponenten y_h , og for eksponenten δ , som beskriver den kritiske isotermen ?

c Ved et trikritisk punkt er $u=0$. Vi må da stabilisere fluktuasjonene med et sjettegradsledd

$$V_6 = v \int_0^1 \ldots \int_0^1 dk_1 \ldots dk_6 \, s(k_1) \ldots s(k_6) \delta(k_1 + \ldots + k_6)$$

Finn bidraget $v_L^{(1)}$ til v_L fra første kumulantledd $\langle V_6 \rangle_0$. Bruk dette til å bestemme øvre kritiske dimensjonalitet for trikritiske punkt.

d Forsøk å formulere spinnfeltteorien for en Ising antiferromagnet på et (hyper-) kubisk gitter. Hvilken universalitetsklasse tilhører modellen ? Hvorfor er det nødvendig å spesifisere gitterstrukturen i dette, i motsetning til det ferromagnetiske tilfellet ?