Løsningsforslag. Eksamen Renormeringsteori i statistisk fysikk, 1987

Oppgave I

a

$$e^{G+H'(s')} = \sum_s P(s',s)\, e^{H(s)} \qquad (1)$$

$H(s)$ karakterisert ved sett $\vec{K} = \{K_1, K_2 \cdots\}$ av koplingskonstanter. G definert ved at $\sum_s H(s) = \sum_{s'} H'(s') = 0$.
Da genererer (1) et nytt sett, $\vec{K}'$, RG transformasjon

$$\vec{K}' = \vec{K}'(\vec{K})$$

Når transformasjonen øker lengdeskalaen med en faktor L, må den fysiske korrelasjonslengden, målt med ny skala oppfylle

$$\xi' = \frac{\xi}{L}$$

Altså RG fører til kortere ξ, og fjerner derfor systemet fra kritisk tilstand, der $\xi = \infty$.
$\xi = \infty$ definerer et invariant (kritisk) underrom i $\vec{K}$-rommet. Anta at et fikspunkt eksisterer i dette underrommet:

$$\vec{K}^* = \vec{K}'(\vec{K}^*)$$

og at transformasjonen er regulær (kan linearisères i alle fall om $\vec{K}^*$ [Regularitet plausibel siden transformasjonen er lokal]:

$$\delta K'_\alpha = \sum_\beta T_{\alpha\beta}\, \delta K_\beta$$

Venstre egentilstand ~~egenfunksjon~~ ~~vekt~~ $\overleftrightarrow{T}$:

$$\sum_\alpha \varphi^i_\alpha T_{\alpha\beta} = \lambda_i \varphi^i_\beta$$

Skaleringsfelt

$$u_i = \vec{\varphi}^i \cdot \delta\vec{K} \quad \Rightarrow \quad u_i' = \lambda_i u_i$$

Med $f = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln Z$ gir $\sum_{s'} [\text{likning } (1)]$, når $\sum_{s'} P(s',s) = 1$:

$$g(\vec{K}) + \frac{N'}{N} f(\vec{K}') = f(\vec{K})$$

Eller, med $N/N' = L^d$ og $\vec{K}$ erstattet med $u_1, u_2, \ldots$:

$$f(u_1, u_2, \cdots) = g(u_1, u_2, \cdots) + \frac{1}{L^d} f(\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \cdots)$$

som vi skulle fram til.

b (i) Vi har allerede brukt "partisjonsfunksjonsbevarelse" som gir

$$\sum_{s'} P(s',s) = 1$$

(ii) Skal $H'(s')$ være reell overalt, må $P(s',s) \geq 0$

(iii) Skal langbølgete fluktuasjoner overleve $H(s) \to H'(s')$ bør

$$P(s',s) = \prod_{\text{celler } c} P_c(s',s)$$

dvs., transformasjonen må være lokal

(iv) Skal mappetakt mellom forskjellige grunntilstander overleve uten forvrengning når $H \to H'$, må disse grunntilstandene være invariante under $P(s',s)$.

(v) Forøvrig? Tja. Enklest mulig! (Hva nå det måtte betyr.)

c Vi brukte

$$\xi' = \frac{\xi}{L} \qquad \text{eller} \qquad \xi_0 \underbrace{(\lambda_t u_t)^{-\nu}}_{\text{prop. } (T-T_c)} \sim \xi_0 \frac{u_t^{-\nu}}{L}$$

Altså $\lambda_t^{-\nu} = L^{-1}$ $\quad \lambda_t \equiv L^{y_t} \Rightarrow L^{-y_t \nu} = L^{-1}$ $\quad \boxed{\nu = \frac{1}{y_t}}$

Dessuten

$$t^{2-\alpha} f_{\text{singular}}(u_t t) \simeq \frac{1}{L^d} f_{\text{sing}}(\lambda_t t) \Rightarrow 1 \sim \frac{\lambda_t^{2-\alpha}}{L^d} \Rightarrow d = y_t(2-\alpha)$$

"Hyperskalering" $\longrightarrow$ $\boxed{2-\alpha = d\nu}$

Oppgave II

a (i) Høytemperaturfikspunkt: $K_1^* = K_2^* = K_3^* = 0$

(ii) Lavtemperaturfikspunkt:

3 stk: (α): $K_1^* = K_2^* = K_3^* = \infty$

(β): $K_1^* = K_2^* = \infty$; $K_3^* = 0$

(γ): $K_1^* = \infty$; $K_2^* = K_3^* = 0$

Av disse er åpenbart (α) ustabilt mhp (β), og (β) ustabilt mhp. (γ). I tillegg har en ustabile fikspunkt når $K_1, K_2, K_3 \to -\infty$.

Altså: $K_1^* = \infty$, $K_2^* = K_3^* = 0$ stabilt lavtemp. fikspkt.

(iii) Kritisk fikspunkt: $K_3^* = 0$, $K_2^* = 0$, $2\psi^2(K_1^*) = 1$

dvs.

$$\frac{e^{4K_1^*}+1}{e^{4K_1^*}+3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\sqrt{2}-1)e^{4K_1^*} = 3-\sqrt{2} \quad \Big| (\sqrt{2}+1)$$

$$K_1^* = \frac{1}{4}\ln(1+2\sqrt{2}) = 0.336$$

b Linearisering av K_1'-likningen:

$$\delta K_1' = \delta K_1 + \frac{3}{2}\delta K_2 + \delta K_3 + 4K_1^*\psi(K_1^*)\frac{d\psi}{dK_1^*}$$

$$= \quad -\,''\,- \quad + 4K_1^* \underbrace{\psi^2(K_1^*)}_{1/2} \frac{d}{dK_1^*}\ln\psi(K_1^*)$$

$$\frac{d}{dK_1^*}\ln\psi(K_1^*) = \frac{4e^{4K_1^*}}{e^{4K_1^*}+1} - \frac{4e^{4K_1^*}}{e^{4K_1^*}+3} = 4(1+2\sqrt{2})\left\{\frac{1}{2(1+\sqrt{2})} - \frac{1}{2(2+\sqrt{2})}\right\}$$

$$= 2(1+2\sqrt{2})\left\{-1+\sqrt{2} - \frac{1}{2}(2-\sqrt{2})\right\} = 8-5\sqrt{2}$$

Altialt gir linearisering

$$\begin{pmatrix} \delta K_1' \\ \delta K_2' \\ \delta K_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_t & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta K_1 \\ \delta K_2 \\ \delta K_3 \end{pmatrix}$$

med

$$\lambda_t = 1 + \frac{1}{2}(8-5\sqrt{2}) \ln(1+2\sqrt{2}) = 1.624$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lambda_3 = \frac{1}{3}$$

c Skaleringsfeltet $u_t = \vec{\varphi}^t \cdot \vec{\delta K}$, der $\vec{\varphi}^t$ er venstre egenvektor med egenverdi λ_t til transf. matrisen. Altså

$$\underset{\varphi_t}{(a,b,c)} \begin{pmatrix} \lambda_t & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(\lambda_t a, \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b, a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c\right)$$

$$= \lambda_t (a,b,c)$$

a kan velges fritt (normering), sett $a=1$.

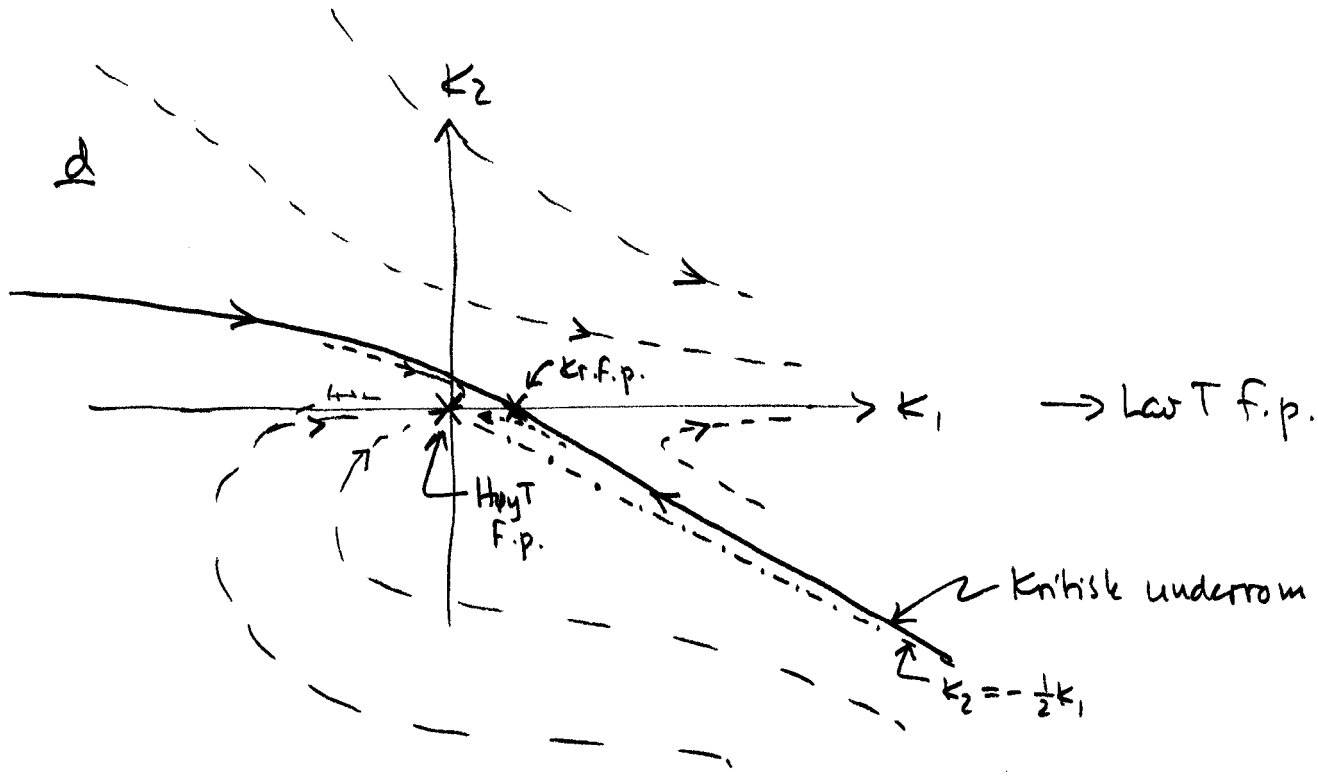
$$\lambda_t b = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} b \quad ; \quad b = \frac{3/2}{\lambda_t - 1/2} = 1.33$$

$$\lambda_t c = 1 + \frac{1}{2} \cdot 1.33 + \frac{1}{3} c \quad ; \quad c = \frac{1 + 0.67}{\lambda_t - 1/3} = 1.29$$

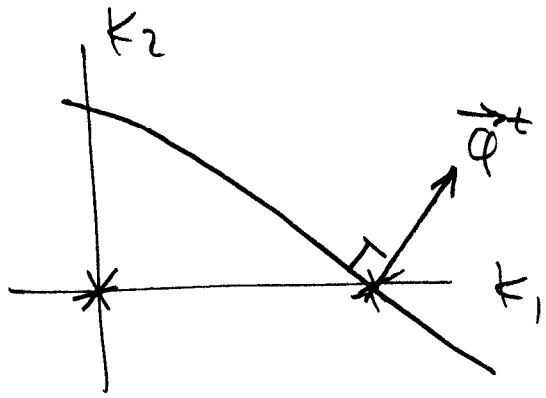
Altså: I lineær tilnærmelse er skaleringsfeltet

$$u_t = \delta K_1 + 1.33\, \delta K_2 + 1.29\, \delta K_3$$

d


k_2
k_1
Kr.f.p.
Høy T f.p.
→ Lav T f.p.
Kritisk underrom
$k_2 = -\frac{1}{2}k_1$

Nærbilde


k_2
$\vec{\varphi}^t$
k_1

Oppgave III

a Kritiske singularitetar er knytta til at $\xi \to \infty$, og de langbølgete fluktuasjonane som er et resultat av dette. Utintegrasjon av kortbølgete fluktuasjoner skulle derfor ikke endre singularitetane

Metoden, oppsummert

(i) Del Fourierspektret $\quad s(k) = \begin{cases} s_L'(k) & k < 1/L \\ \sigma(k) & 1/L < k < 1 \end{cases}$

(ii) Integrer ut $\sigma(k)$ i partisjonsfunksjonen $Z = \int d\sigma\, e^{-H}$ i suksessive approksimasjoner $\Rightarrow$

$$H_L(s_L') = H_0(s_L') + \langle V \rangle_0 - \frac{1}{2}\left[\langle V^2 \rangle_0 - \langle V \rangle_0^2\right] + \cdots$$

(iii) Reskaler $\vec{k}_L = L\vec{k}$ for å bringe $\int dk$ tilbake på opprinnelig form

(iv) Reskaler $s_L = s_L'/p$ for å holde fast koeffisienten i $k^2 s(k) s(-k)$ - leddet.

$$\Rightarrow r_L = r_L(r,u) \; ; \; u_L = u_L(r,u) \quad (+\text{ kompliksjoner})$$

b Homogent ytre felt h gir elastaledd i H:

$$h \cdot s(k=0)$$

Ingen høyfrekvente komponenter å integrere ut ved skalering

$$h \cdot s_L(k=0) \cdot p \quad \Rightarrow \quad h_L = ph$$

Til laveste orden er

$$\int_0^{1/L} dk\, k^2 s_L'(k) s_L'(-k) = \underbrace{L^{-d-2} p^2}_{=1} \int_0^1 dk\, k^2 s_L(k) s_L(-k)$$

slik at $\quad p = L^{\frac{d+2}{2}} = \lambda_h = L^{y_h} \qquad y_h = \frac{d+2}{2}$

Når $T=T_c$ er h det eneste relevante feltet:

$$f_{sing}(h) \sim \frac{1}{L^d} f_{sing}(\lambda_h h)$$

Siden $\partial f/\partial h = m \sim h^{1/\delta}$ ved $t=0$ er

$$h^{1+1/\delta} \sim L^{-d} (\lambda_h h)^{1+1/\delta} \Rightarrow 0 = -d + y_h\left(1+\frac{1}{\delta}\right)$$

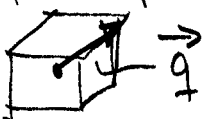
Altså

$$\frac{1}{\delta} = \frac{d-y_h}{y_h} \qquad \delta = \frac{y_h}{d-y_h} = \frac{d+2}{2d-(d+2)} = \frac{d+2}{d-2} \overset{d=3}{=} 5$$

c Bidraget fra $\langle V_6 \rangle_0$ til v_L fra V_6 uten noen integrasjoner Skalering gir da

$$\underbrace{v \cdot L^{-5d} p^6}_{v_L^{(1)} = L^{-5d+3(d+2)} v = L^{-2d+6}} \int_0^1 dk_{L1} \cdots dk_{L6}\, s_L(k_{L1} \cdots s_L(k_{L6})\, \delta(k_{L1} + \cdots + k_{L6})$$

Øvre kritiske dimensjonalitet $d=3$! Gaussfikspunktet er stabilt for $d>3$. $d=3$ marginalt tilfelle.

d For en antiferromagnet på hypercubisk gitter er grunntilstanden (den perfekt ordnete fasen) representert ved  høysymmetripkt på smegrensen til 1. Brillouinsone  $\vec{q}$, $s(\vec{q})$ gir grunntilstanden og langbølgete fluktuasjoner relativt grunntilstanden er beskrevet av $s(\vec{q}+\vec{k})$ der $\vec{k}$ er liten. Bortsett fra forflytning av origo i $\vec{k}$-rommet er dette presis det samme som for en ferromagnet. Samme form på H, samme universalitets-

lekse. Med en annen gittertype, derimot, kan en få problemer, rett og slett fordi det ikke finnes én (eller rettere: 2) veldefinerte grunntilstander. Triangulært gitter i null ytre felt er et ekstremt tilfelle: Uendelig mange "grunntilstander" her. Triangulært gitter i ytre felt gir 3 grunntilstander. Derved må de beskrives av et 2-komponent felt, og 3-tilstands Potts blir ~~lettere~~ vanskelig enn Ising.