UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Kåre Olaussen
Tlf. 3652

EKSAMEN I FAG 71567 IKKE-REGULÆRE APPROKSIMASJONS-METODER I FYSIKKEN

Torsdag 19.desember 1985
kl.0900-1500

Tillatte hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator tillatt.
K.Rottmann: Matematische Formelsammlung.

Oppgave 1

Se på differensialligningen

$$x f'''(x) + 3 f''(x) + 2 f(x) = 0$$

a) Finn og klassifiser de singulære punktene til denne ligningen.

b) Bestem de mulige ledende asymptotiske oppførsler for $f(x)$ når $x \to \infty$ og $x \to 0$.

Oppgave 2

Se på integralet

$$F(x) = \int_0^\infty dt\, e^{-xt-t^{-2}} .$$

a) Bestem den ledende asymptotiske oppførselen for $F(x)$ når $x \to \infty$.

b) Bestem de tre første ledddene i den asymptotiske oppførslen for $F(x)$ når $x \to 0^+$.

Oppgave 3

Analyser randverdi-problemet

$$\varepsilon y'' + x^n y' + x^{n+1} y = 0 \qquad y(-1)=a,\ y(1)=b$$

der $\varepsilon \to 0^+$, og n er et odde positivt heltall $(n=1,3,\ldots)$.

a) Bestem posisjonen og tykkelsen (dvs. avhengighet av ε) av eventuelle grenseskikt som måtte forekomme når $\varepsilon \to 0^+$.

b) Finn, til laveste ikkeforsvinnede orden, ytre og indre løsninger, og foreta en matching mellom disse. Kan du også finne en tilnærmelse som er uniformt gyldig i intervallet $[-1,1]$?

Oppgave 4

Laveste ordens WKB egenverdi-betingelse for problemet

$$\varepsilon^2 y''(x) + Q(x;\lambda)y(x) = 0$$

har normalt formen

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_-}^{x_+} dx\ \sqrt{Q(x;\lambda)} = (n+\tfrac{1}{2})\pi$$

a) Hvordan er $x_\pm$ bestemt ? Under hvilke forutsetninger er denne kvantiseringsbetingelsen utledet?

b) Verifiser at denne egenverdi-betingelsen er eksakt for den endimensjonale harmoniske oscillator

$$Q(x;\lambda) = \lambda - \omega^2 x^2 \ .$$

Radialligningen for et 3-dimensjonalt sfærisk symmetrisk potensial-problem lyder

$$-y''(r) + \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + V(r)\right]y(r) = \lambda y(r) \qquad ; \quad r \geq 0$$

der $\ell=0,1,2,\ldots$ er kvantetallet for dreieimpuls. Vi skal her bare se på tilfeller der $\ell>0$.

Oppgave 4 forts.

c) Finn en WKB kvantiseringsbetingelse som er gyldig for ovenstående egenverdiproblem.

Tips: Tranformer intervallet $(0,\infty)$ på $(-\infty,\infty)$, og bruk det én-dimensjonale resultatet.

d) Skriv, i WKB-tilnærmelsen, egenverdibetingelsene for h.h.vis den harmoniske oscillator,

$$V_1(r) = \omega^2 r^2$$

og hydrogenatomet,

$$V_2(r) = -\frac{e^2}{r}$$

og vis at det er en sammenheng mellom disse egenverdiproblemene.

e) Finn WKB-egenverdiene for disse potensialene $(\ell>0)$.

Oppgitt:

$$\int_0^\infty dt\left(1-e^{-t^{-2}}\right) = \sqrt{\pi} \quad .$$

$$\int_{t_-}^{t_+} \frac{dt}{t} \sqrt{(t_+-t)(t-t_-)} = \frac{\pi}{2}\left[t_+ + t_- - 2\sqrt{t_+ t_-}\right] \quad .$$