UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
GRUPPE FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
F.aman. Kåre Olaussen
Tlf. 3652

EKSAMEN I FAG 71567 MATEMATISKE APPROKSIMASJONSMETODER I FYSIKKEN
Lørdag 23. januar 1988
Tid: kl. 0900-1500

Tillatte hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator tillatt

Oppgave 1.

Se på differensial-ligningen

$$[z^4 \frac{d^2}{dz^2} + z^3 \frac{d}{dz} - (1+\nu^2 z^2)] y_\nu(z) = 0 \ .$$

a) Finn og klassifiser de singulære punktene til denne ligningen.

b) Bestem ved lokal analyse de mulige ledende asymptotiske oppførsler for $y_\nu(z)$ når

$$i) \ z \to 0 \qquad ii) \ z \to 1 \qquad iii) \ z \to \infty$$

med ν fastholdt.

Oppgave 2.

Se på differanse-ligningen

$$f_{\nu+1}(z)+\frac{2\nu}{z}f_{\nu}(z)-f_{\nu-1}(z)=0 \ .$$

a) Bestem ved lokal analyse de mulige ledende asymptotiske oppførsler for $f_{\nu}(z)$ når $\nu\to\infty$ med z fastholdt.

b) Bestem ved lokal analyse så langt du kan de mulige ledende asymptotiske oppførsler for $\log[f_{\nu}(\nu\zeta)]$ (dvs. kontrollerende faktor for $f_{\nu}(\nu\zeta)$) når $\nu\to\infty$ med ζ fastholdt. Sett inn $\zeta=z/\nu$ i dette uttrykket, og verifiser at du får et resultat som stemmer med oppførselen i pkt.a)

Oppgave 3.

Se på integralet

$$g_{\nu}(z)=\int_0^{\infty}dt\,e^{-z\cosh(t)}\cosh(\nu t) \ .$$

a) Bestem de to første leddene i den asymptotiske rekken for $g_{\nu}(z)$ når $z\to\infty$ med ν fastholdt.

b) Bestem ledende asymptotiske oppførsel for $g_{\nu}(\nu\zeta)$ når $\nu\to\infty$ med ζ fastholdt.

Oppgave 4.

Se på egenverdi-problemet

$$-y_n''(x) + x^{2k} y_n(x) = E_n y_n(x) \qquad , \; -\infty < x < \infty$$

der k er et heltall og $n = 0, 1, \ldots$ nummererer egenverdiene i rekkefølge fra laveste egenverdi.

- Bruk WKB-teori til å bestemme ledende asymptotiske oppførsel for egenverdiene $E_n(k)$ når $n \to \infty$ med k fastholdt.

Oppgave 5.

I denne oppgaven skal du analysere startverdiproblemet

$$\ddot{y}(t) + y(t) + y(t)^3 = \epsilon \cos t \qquad , \qquad y(0) = \dot{y}(0) = 0 \; ,$$

ved hjelp av flerskala-utvikling.

a) Skriv $y(t) = \epsilon^{\alpha} Y(t, \tau)$, med $\tau = \epsilon^{\beta} t$, og velg konstantene α og β slik at du får en hensiktsmessig ligning for $Y(t, \tau)$.

b) Vis at nullte ordens løsning for denne ligningen kan skrives på formen

$$Y_0(t, \tau) = A_0(\tau) \sin t + B_0(\tau) \cos t \; ,$$

og bestem startbetingelsene for $A_0(\tau)$ og $B_0(\tau)$ ved $\tau = 0$.

c) Bestem differensial-ligningene som det er naturlig å pålegge $A_0(\tau)$ og $B_0(\tau)$, og finn fra disse den asymptotiske oppførselen for $A_0(\tau)$ og $B_0(\tau)$ når $\tau \to \infty$.

d) Ligningssettet i pkt.c) kan reduseres til en første ordens ligning for kombinasjonen $R(\tau) = A_0(\tau)^2 + B_0(\tau)^2$. Finn denne, og en tilhørende startbetingelse $R(0)$.

VEDLEGG TIL EKSAMEN I FAG 71567 MATEMATISKE APPROKSIMASJONSMETODER I FYSIKKEN

Noen av nedenforstående opplysninger kan muligens være til nytte ved eksamensbesvarelsen.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-t^2/2} = \sqrt{2\pi}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{t} t^{\alpha} = \Gamma(\alpha)$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t} t^{\alpha} (1-t)^{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)} \quad .$$

Det ubestemte integralet:

$$\int d(t^{-1}) \ln[\sqrt{(t^{-2}+1} \pm t^{-1}] = \pm t^{-1}[\ln(\frac{\sqrt{1+t^2}+1}{t}) - \sqrt{1+t^2}] + konst.$$

En trigonometrisk identitet:

$$(A \sin t + B \cos t)^3 = \frac{3}{4}(A^2+B^2)(A \sin t + B \cos t)$$
$$-\frac{1}{4}(A^2-3B^2)A \sin 3t + \frac{1}{4}(B^2-3A^2)B \cos 3t \quad .$$

Noen egenskaper ved Γ-funksjonen:

$$\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu) \quad , \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$
$$\Gamma(\nu) \sim \sqrt{2\pi}\, \nu^{\nu-1/2} e^{-\nu} \quad \text{når} \quad \nu \to \infty \, .$$