UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
GRUPPE FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Prof. Kåre Olaussen
Tlf. 3655 eller 3646

EKSAMEN I FAG 71567 MATEMATISKE APPROKSIMASJONSMETODER I FYSIKKEN
Torsdag 25. august 1988
Tid: kl. 0900-1500

Tillatte hjelpemidler: Alternativ B
Godkjent lommekalkulator
Rottmann: Mathematische Formelsammlung

Oppgave 1.

Se på differensial-ligningen

$$[z^2\frac{d^2}{dz^2}-(az+b)]y(z)=0 \ .$$

a) Finn og klassifiser de singulære punktene til denne ligningen.

b) Bestem ved lokal analyse de mulige ledende asymptotiske oppførsler for $y(z)$ når

$$i)\ z\to 0 \qquad ii)\ z\to 1 \qquad iii)\ z\to\infty$$

med a og b fastholdt.

Oppgave 2.

Se på ligningen

$$\varepsilon x^4 - x^2 + 3x - 2 = 0$$

når $\varepsilon \to 0$.

- Finn de to første leddene i perturbasjonsutviklingen for (alle) røttene til denne ligningen.

Oppgave 3.

Se på integralet

$$I(z) = \int_0^\infty dt \, \frac{e^{-t}}{1+zt} \; .$$

a) Bestem alle leddene i den asymptotiske rekken for $I(z)$ når $z \to 0$.

b) For en gitt liten z, hva er det optimale antallet ledd som bør tas med i denne rekken for å oppnå best nøyaktighet?

c) For en gitt liten z, hva blir den best mulige nøyaktighet som kan oppnås fra denne rekken (uten resummasjon)? Estimér denne nøyaktigheten når $z = 0.1$, $z = 0.01$ og $z = 0.001$.

d) Bestem den ledende asymptotiske oppførsel for $I(z)$ når $z \to \infty$.

Oppgave 4.

Burger's ligning

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}$$

har til orden ε^0 en løsning

$$u(x,t) = \begin{cases} (x/t) & , 0 \le x \le u_m t, \\ (2u_m - x)/(2-t) & , u_m t \le x \le 2u_m. \end{cases}$$

Denne løsningen utvikler et sjokk for $t \ge 2$. Du skal i denne oppgaven bruke grensesjikt-teori til å finne en ledende ordens løsning for slike tider.

a) Anta at den indre løsningen (dvs. sjokkfronten) har en similaritetsform

$$U = U\left(\frac{x - x_s(t)}{\delta(\varepsilon)}\right) \quad ,$$

og bestem tykkelsen $\delta(\varepsilon)$ på sjokket.

b) Finn og løs ligningen for U.

c) Bestem ved matching til den ytre løsningen en differensialligning for posisjonen $x_s(t)$ av sjokket, og løs denne differensialligningen.

Oppgave 5.

Se på egenverdi-problemet

$$-\varepsilon^2 y_n''(x) + (e^{-2x} - 2e^{-x}) y_n(x) = -\lambda_n y_n(x) \qquad , -\infty < x < \infty$$

når $\varepsilon \to 0^+$. Indeksen $n = 0, 1, \ldots$ nummererer her de diskrete egenverdiene i rekkefølge fra laveste egenverdi.

a) Skriv ned WKB-kvantiseringsbetingelsen for ledende ordens bestemmelse av egenverdiene.

b) Finn (til ledende orden) $\lambda_n(\varepsilon)$ når $\varepsilon \to 0^+$.

c) Estimér antallet diskrete tilstander, n_{max}, i denne grensen.

VEDLEGG TIL EKSAMEN I FAG 71567 MATEMATISKE APPROKSIMASJONSMETODER I FYSIKKEN

Noen av nedenforstående opplysninger kan muligens være til nytte ved eksamensbesvarelsen.

$$\int_{t_-}^{t_+} \frac{dt}{t} \sqrt{(t_+ - t)(t - t_-)} = \frac{1}{2}\pi \left(t_+ + t_- - \sqrt{4t_+t_-}\right)$$

Noen egenskaper ved Γ-funksjonen:

$$\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu) \quad , \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\nu) \sim \sqrt{2\pi}\, \nu^{\nu-1/2} e^{-\nu} \quad \text{når} \quad \nu \to \infty \, .$$