UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
GRUPPE FOR TEORETISK FYSIKK

LØSNINGSFORSLAG:
EKSAMEN I FAG 71567 MATEMATISKE APPROKSIMASJONSMETODER I FYSIKKEN
Lørdag 23. januar 1988 kl 9-15

Oppgave I.

Ligningen var $y'' + z^{-1}y' - (z^{-4} + \nu^2 z^{-2})y = 0$, eller med $u = z^{-1}$:

$$\left[\frac{d^2}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{d}{du} - \left(1 + \frac{\nu^2}{u^2}\right)\right]y = 0$$

som er en modifisert Bessel-ligning. (Et linært uavhengig sett av løsninger er derfor gitt ved Bessel-funksjoner, f.eks $I_\nu(z^{-1})$ og $K_\nu(z^{-1})$).

a) Av overstående ser vi at vi har et essensielt singulært punkt i $z = 0$, et regulært singulært punkt i $z = \infty$, og ingen andre singulære punkter.

bi) Vi substituerer $y = e^S$, med $S_0 + S_1 + \cdots$, og finner

$$[S'^2 + S'' + z^{-1}S' - (z^{-4} + \nu^2 z^{-2})] = 0 \quad .$$

Ved inspeksjon finnes ledende balanse $S_0'^2 = z^{-4}$, dvs $S_0 = \pm z^{-1}$. Til neste orden fås

$$2S_0' S_1' = -S_0'' - z^{-1}S_0' + \nu^2 z^{-2} = \mp z^{-3} + \cdots$$

Herav finner vi $S_1' = 1/2z$, dvs $S_1 = \frac{1}{2}\ln z$, og altså

$$y \sim konst.\ z^{1/2} e^{\pm z^{-1}} \quad .$$

bii) Siden $z = 1$ er et ordinært punkt kan løsningen utvikles i Taylor-rekke: $y = c_0 + c_1(z-1) + \cdots$. Ledende oppførsel er altså $y \sim konst.$ eller $y \sim konst.\ (z-1)$.

biii) Ifølge Frobenius-metoden vil $y = c_0 z^\mu (1 + c_1/z + \cdots)$. Indicie-ligningen for μ blir

$$\mu(\mu - 1) + \mu - \nu^2 = 0$$

dvs. $\mu = \pm\nu$. Atså vil $y \sim konst.\ z^{\pm\nu}$. Et unntak er spesialtilfellet $\nu = 0$ der $y \sim konst.$ eller $y \sim konst.\ \ln z$.

Oppgave 2

Ligningen var

$$f_{\nu+1}(z)+\frac{2\nu}{z}f_\nu(z)-f_{\nu-1}(z)=0\ ,$$

som er en rekursjonsrelasjon for de modifiserte Bessel-funksjonene $I_\nu(z)$ og $e^{i\nu\pi}K_\nu(z)$.

a) Vi prøver metoden med dominerende balanse:

i) Antar $f_{\nu+1}\sim-(2\nu/z)f_\nu \gg f_{\nu-1} \Rightarrow$

$$f_\nu\sim konst.\ e^{i\pi\nu}\left(\frac{2}{z}\right)^\nu\Gamma(\nu)\sim konst.\nu^{-1/2}e^{\nu\ln(2\nu/z)-\nu+i\nu\pi}\qquad\Rightarrow$$

$f_{\nu-1}/f_\nu\sim-2/[z(\nu-1)]\to0$ når $\nu\to\infty$, så denne løsningen er konsistent med antagelsen.

ii Antar $(2\nu/z)f_\nu\sim f_{\nu-1}\gg f_{\nu+1}\quad\Rightarrow$

$$f_\nu\sim konst.\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\sim konst.\nu^{-1/2}e^{-\nu\ln(2\nu/z)+\nu}\qquad\Rightarrow$$

$f_{\nu+1}/f_\nu\sim z/2(\nu+1)\to0$ når $\nu\to\infty$, så denne løsningen er også konsistent med antagelsen.

iii) Siden ligningen er av annen orden venter vi ikke flere mulige asymptotiske oppførsler, med det er også lett å se at antagelsen $f_{\nu+1}\sim f_{\nu-1}\gg(2\nu/z)f_\nu$ ikke fører til en konsistent løsning.

b) Definerer vi $h_\nu(\zeta)=f_\nu(\nu\zeta)$ så blir differanseligningen

$$h_{\nu+1}\left(\frac{\zeta}{1+\nu^{-1}}\right)+\frac{2}{\zeta}h_\nu(\zeta)-h_{\nu-1}\left(\frac{\zeta}{1-\nu^{-1}}\right)=0\ .$$

Siden ν nå ikke opptrer som koeffisient i ligningen er det rimelig å anta at alle leddene i ligningen er like viktige. Siden vi dessuten essensielt har en konstant koeffisient ligning forventer vi et asymptotisk oppførsel av formen $h_\nu\sim konst.y(\zeta)^\nu=konst.\,e^{\nu\eta(\zeta)}$. Vi setter inn denne ansatzen, og Taylor-utvikler:

$$(\nu+1)\eta\left(\frac{\zeta}{1+\nu^{-1}}\right)=\nu\eta(\zeta)+[\eta(\zeta)-\zeta\eta'(\zeta)]+\cdots\qquad,$$

$$(\nu-1)\eta\left(\frac{\zeta}{1-\nu^{-1}}\right)=\nu\eta(\zeta)-[\eta(\zeta)-\zeta\eta'(\zeta)]+\cdots\qquad.$$

Med $x = e^{\eta(\zeta) - \zeta\eta'(\zeta)}$ fås dermed ligningen

$$x + 2\zeta^{-1} - x^{-1} = 0 \ ,$$

dvs. $x = -\zeta^{-1} \pm [\zeta^{-2}+1]^{1/2}$, og altså

$$-\zeta\eta' + \eta = -\zeta^2 \frac{d}{d\zeta}\eta = \begin{cases} \ln[(\zeta^{-2}+1)^{1/2} - \zeta^{-1}] \\ \ln[(\zeta^{-2}+1)^{1/2} + \zeta^{-1}] + i\pi \end{cases}$$

Altså

$$\zeta^{-1}\eta = \int d(\zeta^{-1}) \times \begin{cases} \ln[(\zeta^{-2}+1)^{1/2} - \zeta^{-1}] \\ \ln[(\zeta^{-2}+1)^{1/2} + \zeta^{-1}] + i\pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\zeta^{-1}\{\ln[(\zeta^{-2}+1)^{1/2} + \zeta^{-1}]) - (1+\zeta^2)^{1/2}\} + konst. \\ +\zeta^{-1}\{\ln[(\zeta^{-2}+1)^{1/2} + \zeta^{-1}] - (1+\zeta^2)^{1/2} + i\pi\} + konst. \end{cases}$$

der integralet var vedlagt oppgaveteksten. Altså

$$\ln[f_\nu(\nu\zeta)] \sim \begin{cases} -\nu\{\ln[(\zeta^{-2}+1)^{1/2} + \zeta^{-1}]) - (1+\zeta^2)^{1/2}\} + konst.\zeta \\ +\nu\{\ln[(\zeta^{-2}+1)^{1/2} + \zeta^{-1}] - (1+\zeta^2)^{1/2} + i\pi\} + konst.\zeta \end{cases}$$

Setter $\zeta = z/\nu$ vi inn i dette uttrykket fås (når $\nu \to \infty$)

$$\ln[f_\nu(z)] \sim \begin{cases} -\nu \ln(2\nu/z) + \nu + konst.z \\ +\nu \ln(2\nu/z) - \nu + i\pi\nu + konst.z \end{cases}$$

som er konsistent med resultatet fra pkt.a). Vi ser at integrasjonskonstanten *konst.* ikke lar seg bestemme ved lokal analyse av differanseligningen. Den kan absorberes i en vilkårlig (z-avhengig) normeringskonstant.

Oppgave 3

Integralet var

$$g_\nu(z) = \int_0^\infty dt\, e^{-z\cosh(t)} \cosh(\nu t) \ ,$$

som er en integralrepresentasjon for $K_\nu(z)$.

a) Når $z \to \infty$ vil hovedbidraget til integralet komme fra $t \approx 0$, så vi rekkeutvikler i t, og innfører i neste omgang $u = z t^2/2$:

$$g_\nu(z) \sim e^{-z} \int_0^\infty dt\, e^{-z\,[t^2/2 + t^4/24 + \cdots]}\, [1 + (\nu t)^2/2 + \cdots]$$

$$\sim e^{-z} \int_0^\infty \frac{du}{(2uz)^{1/2}}\, e^{-u}\, (1 - u^2/6z + \cdots)(1 + \nu^2 u/z + \cdots)$$

$$\sim \frac{1}{(2z)^{1/2}} e^{-z} [\Gamma(1/2) + z^{-1}(-\Gamma(5/2)/6 + \nu^2 \Gamma(3/2)) + \cdots]$$

$$\sim \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} [1 + z^{-1}(4\nu^2 - 1)/8 + \cdots] \quad .$$

b) Med $z = \nu\zeta$ vil hovedbidraget til integralet komme fra endelige verdier av t når $\nu \to \infty$. Vi kan da tilnærme $\cosh(\nu t) \sim e^{\nu t}/2$ og får

$$g_\nu(\nu\zeta) \sim \int_0^\infty dt\, e^{-\nu(\zeta \cosh t - t)} \quad .$$

Hovedbidraget til integralet kommer fra området $t \approx t_0$, der $1 - \zeta \sinh t_0 = 0$, så vi tilnærmer

$$g_\nu(\nu\zeta) \sim e^{-\nu(\zeta \cosh t_0 - t_0)} \int_0^\infty dt\, e^{-(\nu\zeta \cosh t_0)(t - t_0)^2/2}$$

$$= \left(\frac{2\pi}{\nu\zeta \cosh t_0}\right)^{1/2} e^{-\nu(\zeta \cosh t_0 - t_0)} \quad .$$

Her kan vi eksplisitt innføre

$$t_0 = \ln\left[\frac{1 + (1 + \zeta^2)^{1/2}}{\zeta}\right] \quad , \qquad \zeta \cosh t_0 = (1 + \zeta^2)^{1/2} \, ,$$

og får

$$g_\nu(\nu\zeta) \sim \left(\frac{2\pi}{\nu}\right)^{1/2} (1 + \zeta^2)^{-1/4} \left[\frac{1 + (1 + \zeta^2)^{1/2}}{\zeta}\right]^\nu e^{-\nu(1 + \zeta^2)^{1/2}} \quad .$$

Denne asymptotiske oppførselen er konsistent med resultatet av den lokale analysen i pkt.2b).

Oppgave 4

Siden $E_n \to \infty$ når $n \to \infty$ blir WKB-tilnærmingen god i denne grensen. Altså:

$$2\int_0^{x_{max}} dx\sqrt{E_n - x^{2k}} \sim (n+\frac{1}{2})\pi$$

der $x_{max}^{2k} = E_n$. Innfører ny variabel $t = x^{2k}/E_n$, og får

$$2E_n^{(k+1)/2k}\int_0^1 \frac{dt}{t} t^{1/2k}(1-t)^{1/2} = 2E_n^{(k+1)/2k}\frac{\Gamma(1/2k)\Gamma(3/2)}{\Gamma((3k+1)/2k)} \sim (n+\frac{1}{2})\pi \quad ,$$

Setter $\Gamma(3/2) = \pi^{1/2}/2$ og løser ut med hensyn på E_n:

$$E_n \sim [\pi^{1/2}\frac{\Gamma((3k+1)/2k)}{\Gamma(1/2k)} n]^{2k/(k+1)} \qquad \text{når } n \to \infty \ .$$

Oppgave 5

Ligningen var

$$\ddot{y}(t) + y(t) + y(t)^3 = \epsilon \cos t \quad , \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0 \ ,$$

a) Innfører $Y(t,\tau)$ som foreslått i oppgaveteksten, og finner etter divisjon med ϵ^α:

$$Y_{tt} + 2\epsilon^\beta Y_{t\tau} + \epsilon^{2\beta} Y_{\tau\tau} + Y + \epsilon^{2\alpha} Y^3 = \epsilon^{1-\alpha}\cos t$$

Vi gjetter at andre, femte, og siste ledd i denne ligningen vil være av samme orden i ϵ, dvs. $\beta = 2\alpha = 1-\alpha$ eller $\alpha = 1/3$, $\beta = 2/3$. Til første orden i $\epsilon^{2/3}$ får vi derfor ligningen

$$Y_{tt} + Y = \epsilon^{2/3}(\cos t - 2Y_{t\tau} - Y^3) \ .$$

b) Laveste ordens løsning sees ved inspeksjon å være

$$Y_0(t,\tau) = A_0(\tau)\sin t + B_0(\tau)\cos t \ ,$$

der startbetingelsen pålegger betingelsene

$$B_0(0) = 0 \quad , \quad A_0(0) + \epsilon^{2/3} B_0'(0) = 0$$

på koeffisientfunksjonene $A(\tau)$, $B(\tau)$. (Her kan leddet $\epsilon^{2/3}B_0'(0)$ neglisjeres, siden det er en høyere ordens korreksjon som kan bli tatt hensyn til som startbetingelse for neste ledd i utviklingen.)

c) Når vi går til neste orden i utviklingen får vi et inhomogent ledd

$$\epsilon^{2/3}(\cos t - 2Y_{0,t\tau} - Y_0^3) = \epsilon^{2/3}[\cos t - 2A'\cos t + 2B'\sin t - \frac{3}{4}(A^2+B^2)(A\sin t + B\cos t)$$
$$+\frac{1}{4}(A^2-3B^2)A\sin 3t - \frac{1}{4}(B^2-3A^2)B\cos 3t] \ .$$

Hvis vi ønsker å eliminere de sekulære leddene (og det gjør vi!) må vi pålegge betingelsene

$$1 - 2A' = \frac{3}{4}(A^2+B^2)B \quad , \quad 2B' = \frac{3}{4}(A^2+B^2)A$$

på A og B. Kombinerer vi disse ligningene med startbetingelsen fra pkt.b) så finner vi $A(0) = B(0) = B'(0) = 0$ og $A'(0) = \frac{1}{2}$.

d) Ved å dividere de to ligningene på hverandre og kryssmultiplisere finner vi at

$$A - 2AA' = 2BB' \ ,$$

og siden $2AA' + 2BB' = (A^2+B^2)' = R'$, $B^2 = R - A^2$, finnes sammenhengen

$$A = R' \quad , \quad B = (R - R'^2)^{1/2} \ ,$$

som innsatt i de opprinnelige ligningene gir

$$2\frac{d}{d\tau}(R - R'^2)^{1/2} = \frac{3}{8}\frac{d}{d\tau}R^2 \ .$$

Denne ligningen kan integreres én gang, og integrasjonskonstanten bestemmes ved å sette inn startbetingelsene i $\tau = 0$, dvs. $R(0) = R'(0) = 0$. Vi får derfor

$$R - R'^2 = \frac{9}{256}R^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{dR}{[R(1-9R^3/256)]^{1/2}} = d\tau \ ,$$

som ikke kan integreres videre ved elementærfunksjoner ($\tau(R)$ kan uttrykkes ved en hypergeometrisk funksjon, eller mer spesifikt ved en Legendre-funksjon

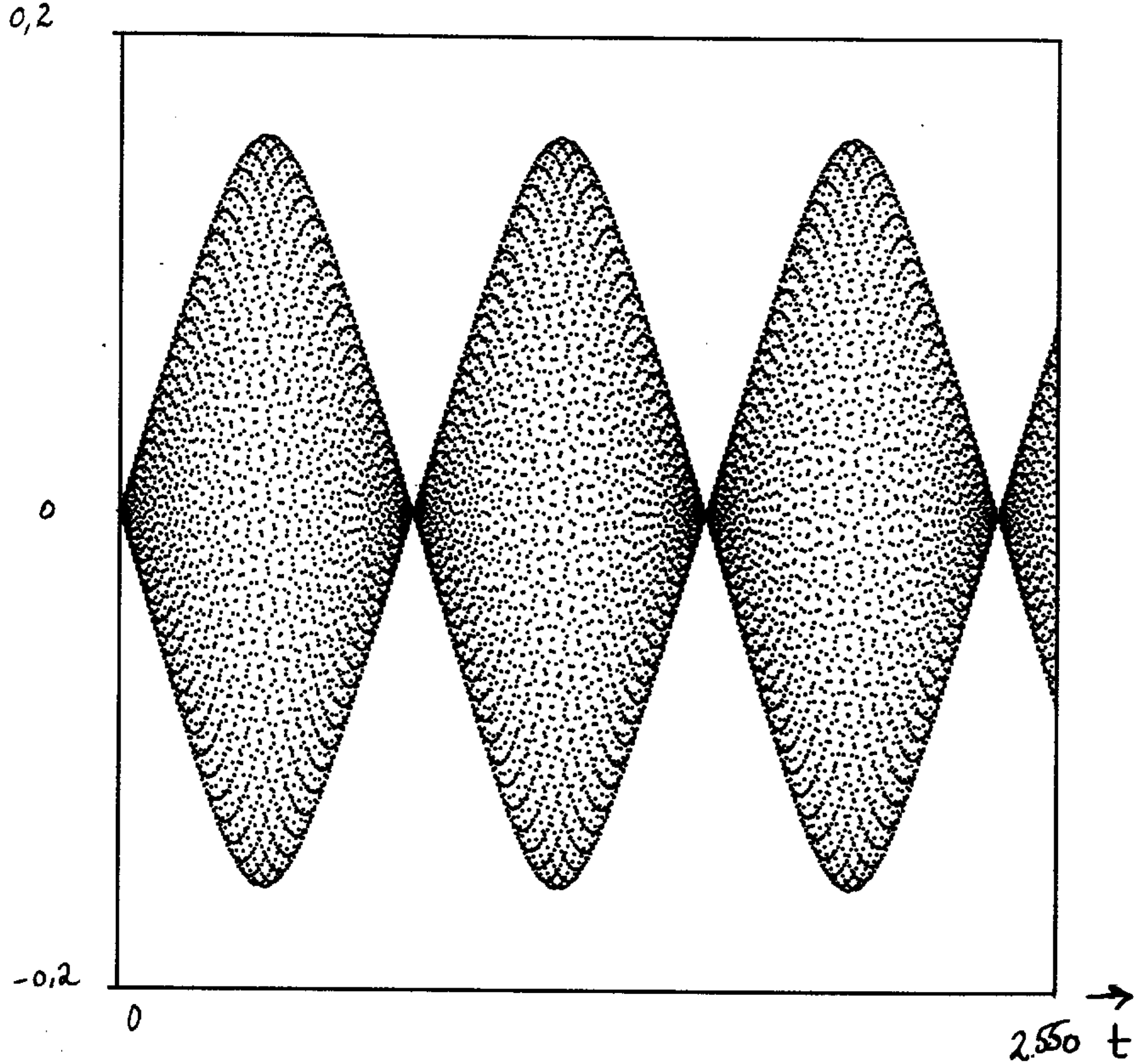
$P^{-1/6}_{-1/6}$). Men siden R-integralet er konvergent når $R \to 0$ og $R^3 \to 256/9$ blir $R(\tau)$ en periodisk funksjon med amplitude $R^{1/2}_{\max} = (256/9)^{1/6} \approx 1.74716\ldots$, og periode (substituerer $t = 9R^3/256$):

$$\tau_{\mathrm{per}} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{4/3}\int_0^1 \frac{dt}{t} t^{1/6}(1-t)^{-1/2} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{4/3}\frac{\Gamma(1/6)\Gamma(1/2)}{\Gamma(2/3)} \approx 8.486487\ldots .$$

Sammenligner man disse resultatene med en numerisk integrasjon av ligningen får man god overensstemmelse.

$\epsilon = \frac{1}{1.000}$

$\Delta t = \frac{2}{10} = 0{,}2$

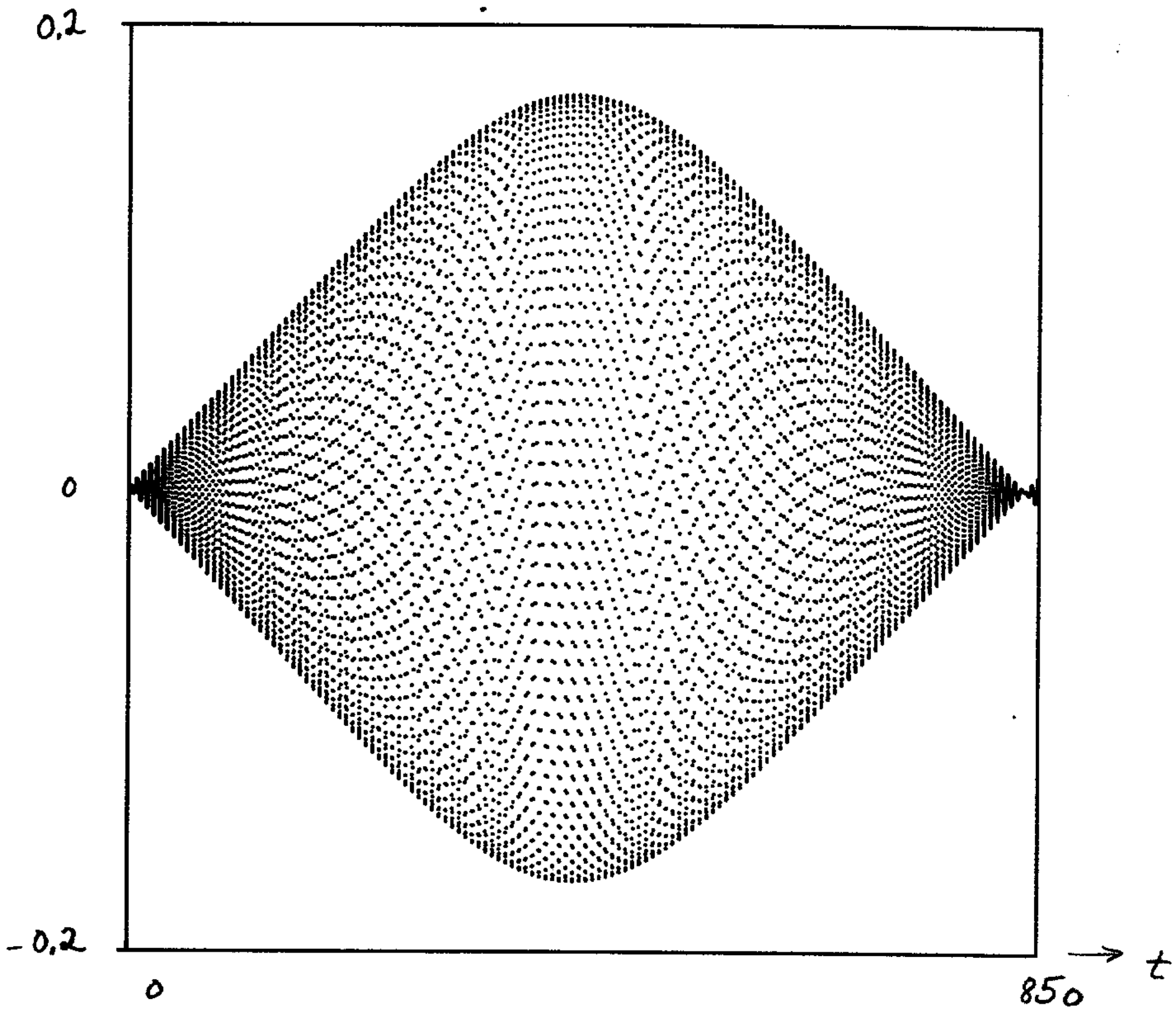


N = 12.750 punkter.

Numerisk løsning av differensialligningen (av Roger Sollie).

$\epsilon = \frac{1}{1000}$

$\Delta t = \frac{\pi}{30} \approx 0{,}105$



$y_{max} \approx 1.698 \cdot 10^{-1}$

N = 8.117 punkter.