UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

Prof.P.C.Hemmer
Tlf. 3648

EKSAMEN I FAG 72030 FASTE STOFFERS FYSIKK I

Tirsdag 11.juni 1985
kl.0900-1500

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung.

Oppgave 1

a) Et éndimensjonalt Bravaisgitter med to atomer (masser m og $M=m\cdot\mu$) pr. primitiv enhetscelle (lengde ℓ) har harmonisk vekselvirkning med kraftkonstant α mellom nærmeste naboer. Vis at dispersjonsrelasjonen for gitteret er

$$\omega = \tfrac{1}{2}\omega_0\sqrt{1+\mu\pm\sqrt{(1+\mu)^2-4\mu\sin^2(k\ell/2)}}\ ,$$

med $\omega_0=\sqrt{4\alpha/M}$. Skisser dispersjonsrelasjonen. Er alle k-verdier like interessante?

b) Skissér også kvalitativt frekvensfordelinga $g(\omega)$ og gruppehastigheten $v_g(k)$.

c) Sett nå $m=M$. Hva blir dispersjonsrelasjonen i dette forenklede tilfellet, og hva er sammenhengen mellom denne og dispersjonsrelasjonen

$$\omega^2 = (4\alpha/M)\sin^2(ka/2)$$

for et enatomig gitter med gitterkonstant a .

d) For en gitt bølgelengde, hvor mange akustiske og optiske moder har en tredimensjonal krystall med p atomer i basis?

e) For en makroskopisk énkrystall bestående av $N=N_1N_2N_3$ celler pålegges vibrasjonsamplitudene $\vec{u}(\vec{R})$ periodiske grensevilkår,

$$\vec{u}(\vec{R}+\vec{a}_iN_i) = \vec{u}(\vec{R})\ ,$$

der $i=1,2$ eller 3 og $\vec{a}_i$ er en primitiv gittervektor.

Bestem de tillatte bølgetallsvektorer $\vec{k}$ for en harmonisk bølge, uttrykt ved basisvektorene $\vec{b}_i$ i det resiproke gitter.
Hvor mange slike (ikke ekvivalente) $\vec{k}$-verdier representerer dette, og hva er modetettheten i $\vec{k}$-rommet (for hver gren og hver polarisasjonsretning)?

f) Skriv opp et integraluttrykk for den indre energi $U(T)$ for fononmodene i en krystall med frekvensfordeling $g(\omega)$. Vis at ved lave temperaturer er varmekapasitetsbidraget fra disse frihetsgradene gitt ved

$$C_V(T) \simeq V k_B \frac{2\pi^2}{15}\left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^3 \sum_{i=1}^{3} v_i^{-3} \quad ,$$

under forutsetning av at langbølgelydhastighetene v_i for de 3 akustiske modene er konstante (uavhengig av retning og bølgetall).

Oppgave 2

a) Hva er en halvleders makroskopiske og mikroskopiske kjennetegn? Definér en intrinsikk og en ekstrinsikk halvleder.

b) Anta at bunnen av ledningsbandet i en halvleder er parabolsk,

$$\epsilon(k) = \epsilon_\ell(0) + \hbar^2 k^2/2m_\ell \quad ,$$

og argumenter for at i termisk likevekt inneholder ledningsbandet

$$2(m_\ell k_B T/2\pi\hbar^2)^{\frac{3}{2}} \, e^{[\mu-\epsilon_\ell(0)]/k_B T}$$

elektroner pr.volumenhet.

c) Når toppen av valensbandet også er parabolsk,

$$\epsilon(k) = \epsilon_v(0) - \hbar^2 k^2/2m_v$$

blir, på tilsvarende vis, hullkonsentrasjonen

$$p = 2(m_v k_B T/2\pi\hbar^2)^{\frac{3}{2}} \, e^{-[\mu-\epsilon_v(0)]/k_B T}$$

Beregn, for en <u>intrinsikk</u> halvleder, posisjonen av Ferminivået μ og elektrontettheten n_e i ledningsbandet.

d) Halvlederen indium antimonid (InSb), der den effektive dynamiske masse m_ℓ er 1% av elektronmassen m, er dopet med en donorkonsentrasjon $n_d = 5\cdot 10^{21}\ m^{-3}$. Bindingsenergien for donornivåene er 0.01 eV og en kan vise at ved romtemperatur er disse praktisk talt fullstendig ioniserte. Hva er posisjonen av Ferminivået i forhold til ledningsbåndkanten $\epsilon_\ell(0)$ ved romtemperatur for denne ekstrinsikke halvlederen? Gjør også et grovt overslag over den numeriske størrelsesorden (i eV).

e) Gi en kort kommentar om hvorledes størrelsen av bandgapet i en intrinsikk halvleder kan finnes eksperimentelt.

Oppgave 3

a) Kopper krystalliserer i kubisk flatesentrert gitter. Hvilken gittertype er det resiproke gitter i dette tilfellet? (skal ikke vises).

b) Hvorledes varierer et rent metalls elektriske ledningsevne med temperaturen for høye temperaturer (begrunn svaret).

c) Midlere feltteori for en $S=\frac{1}{2}$ (Ising) ferromagnet i et ytre felt $\vec{B}$ gir følgende relasjon mellom magnetiseringen M og temperaturen T:

$$M = ng\mu_B \tanh\left[\frac{g\mu_B}{k_B T}(B+\lambda M)\right]$$

der n er antall spinn pr.volumenhet og λ er relatert til vekselvirkningsenergien $J(\vec{r})$ mellom to spinn i avstand $\vec{r}$:

$$\lambda = \frac{1}{n\mu_B^2 g^2}\sum_{\vec{r}} J(\vec{r}) \quad .$$

Denne approksimative teorien gir en kritisk temperatur T_C i null ytre felt. Bestem T_C, og skissér den spontane magnetiserings temperaturforløp.

VEDLEGG

Noen av de nedenforstående uttrykk og konstanter kan vise seg nyttige.

Midlere besettelsestall for fermioner:
$$n(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_BT} + 1}$$

Midlere besettelsestall for fononer:
$$n(\omega) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_BT} - 1}$$

Nivåtetthet for frie elektroner:
$$(\epsilon(k) = \epsilon_0 + \hbar^2 k^2/2m) : g(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} (\epsilon - \epsilon_0)^{\frac{1}{2}}$$

Bohrradien:
$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0.53\text{Å}$$

Hydrogens ioniseringsenergi:
$$E_i = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = \frac{\hbar^2}{2ma_0^2} = 13.6 \text{ eV}$$

Bohr magneton:
$$\mu_B = 9.3 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$$

Ved romtemperatur er $k_BT \simeq \frac{1}{40}$ eV

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} = \frac{\pi^2}{6} \; ; \; \int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15} \; ; \; \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} e^{-x}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots \quad .$$