FASTE STOFFERS FYSIKK I 14.8.85

Løsningsskisse

Oppgave 1

a) ~~Den~~ enkle klassiske Halleffekt er at et magnetfelt som påtrykkes en strømleder gir opphav ~~til~~ et potensial tilsvarende et felt normalt på magnetfelt og på strømretning.

I stasjonær tilstand er Lorentzkrafta i y-retning lik null, dvs:

$$F_y = -e\mathcal{E}_y + ev_x B_z = 0 \quad \therefore \quad \mathcal{E}_y = v_x B_z$$

Her er partikkelhastigheten og strømtettheten proporsjonale:

$$j_x = -e n_- v_x \, .$$

Hallkoeffisienten blir

$$R = \frac{\mathcal{E}_y}{j_x B_z} = \frac{v_x B_z}{-e n_- v_x B_z} = -\frac{1}{e n_-}$$

b) Her er

$$j_x = \frac{10^{-2}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}} = 2000 \text{ A m}^{-2}$$

$$|E_y| = \frac{0.004}{0.005} = 0.8 \text{ V m}^{-1}$$

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

slik at

$$n_- = \frac{j_x \cdot B_z}{e|\mathcal{E}_y|} = \frac{2000 \cdot 0.6}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.8} \text{ m}^{-3} = \frac{15}{16} 10^{22} \text{ m}^{-3}$$

$$= .94 \; 10^{22} \text{ m}^{-3}$$

c) Når mobilitetene $\mu_\pm$ regnes positive fås

$$j_x = (n_+ e\mu_+ + n_- e\mu_-)\mathcal{E}_x$$

$$j_y = n_+ e\mu_+ [\mathcal{E}_y - (\mu_+ \mathcal{E}_x) B_z] + n_- e\mu_- [\mathcal{E}_y + (\mu_- \mathcal{E}_x) B_z]$$

$j_y = 0$ gir $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_x B_z \, (\mu_+^2 n_+ - \mu_-^2 n_-)/(n_+\mu_+ + n_-\mu_-)$

og

$$R = \frac{\mathcal{E}_y}{B_z j_x} = \frac{\mu_+^2 n_+ - \mu_-^2 n_-}{e(\mu_+ n_+ + \mu_- n_-)^2}$$

Oppgave 2

a) Eksperimentelt: (i) el. ledningsevnens størrelse er mye mindre enn metallers og mye større enn isolatorers

(ii) el. ledningsevne <u>øker</u> med økende temperatur

Intrinsikk: Strøm skyldes, i hovedsak, termisk eksiterte ladningbærere.

Ekstrinsikk: Ladningsbærerne skyldes i hovedsak doping.

b) Da besettelsestallene i ledningsbandet er relativt beskjedne settes

$$n(\epsilon) = \frac{1}{1+e^{(\epsilon-\mu)/k_BT}} \simeq e^{(\mu-\epsilon)/k_BT}$$

Elektrontallet i ledningsbandet er da

$$N_\ell = \int_{\epsilon_\ell(0)}^{\infty} d\epsilon \; n(\epsilon)\, g(\epsilon) = \int_{\epsilon_\ell(0)}^{\infty} d\epsilon \; e^{\frac{\mu-\epsilon}{k_BT}} \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m_\ell}{\hbar^2}\right)^{3/2}\left[\epsilon-\epsilon_\ell(0)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Med ny variabel $\epsilon = \epsilon_\ell(0) + k_BT \cdot x$ blir dette

$$e^{\frac{\mu-\epsilon_\ell(0)}{k_BT}} \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m_\ell k_BT}{\hbar^2}\right)^{3/2} \underbrace{\int_0^{\infty} dx\, e^{-x} x^{1/2}}_{\sqrt{\pi}/2}$$

Dvs

$$n_\ell = \frac{N_\ell}{V} = 2\left(\frac{m_\ell k_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{\frac{\mu-\epsilon_\ell(0)}{k_BT}}$$

c) Ladningsbevarelse for en intrinsikk halvleder tilsier at

$$p = n_\ell .$$

Det gir

$$e^{[2\mu-\epsilon_\ell(0)-\epsilon_v(0)]/k_BT} = \left(\frac{m_v}{m_\ell}\right)^{3/2}$$

$$\mu = \frac{\epsilon_\ell(0)+\epsilon_v(0)}{2} + \frac{3}{4} k_BT \ln\frac{m_v}{m_\ell}$$

Siste ledd er vanligvis lite ($k_BT_{rom} \simeq \frac{1}{40}$ eV) så dette er nær midten av energigapet.

Elektrontettheten

$$n_e = \sqrt{n_e \cdot p} = 2(m_l m_v)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{k_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{\epsilon_l(0)-\epsilon_v(0)}{k_BT}}$$

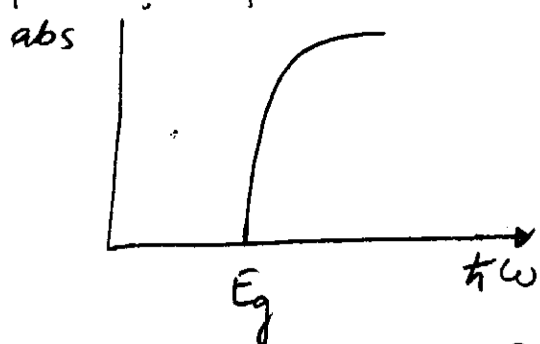
d) Bandgapet kan bestemmes eksperimentelt ved

(i) å måle ledningsevnens temperaturavhengighet, siden ledningsevnen er $\propto$ antall ladningsbærere, etter det ovenstående

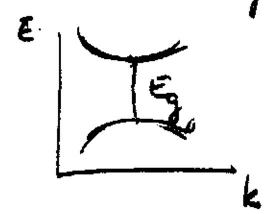
$$\sigma \propto T^{3/2} e^{-E_g/2k_BT}, \quad E_g \equiv \epsilon_l(0) - \epsilon_v(0)$$

Da $T^{3/2}$ faktoren varierer langsomt, vil helningen i et $\ln \sigma$ mot T^{-1}-plot være tilnærmet $-E_g/2k_B$.

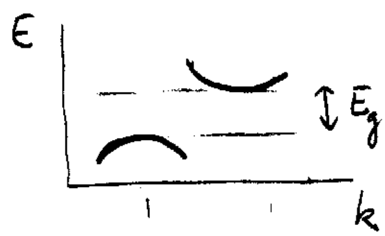
(ii) å måle absorbsjon av fotoner, som funksjon av frekvens:



For et direkte gap



For et indirekte gap må et fonon hjelpe til med bølgetallsbevarelse da $k_{foton} \approx 0$.



Oppgave 3

For overkritiske temperaturer er M liten når B er liten, og $\tanh[\ ] \approx [\ ]$, dvs

$$M \simeq \frac{ng^2\mu_B}{k_BT} B \Big/ \left(1 - \frac{ng^2\mu_B^2\lambda}{k_BT}\right)$$

Det gir susceptibiliteten

$$\chi = \frac{\mu_0 M}{B} = \frac{\mu_0 m g^2 \mu_B}{k_B} \; \frac{1}{T - \frac{1}{k_B}\sum_{\vec{r}} J(\vec{r})}$$

når det settes inn for λ.

Vi ser at χ divergerer for $T \to T_c$,

der

$$T_c = \frac{1}{k_B}\sum_{\vec{r}} J(\vec{r})$$

Oppgave 4

Bevegelseslikning for utslaget u_n av atom nr. n:

$$m\frac{d^2}{dt^2}u_n = \alpha_1 (u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n) + \alpha_2 (u_{n-2} + u_{n+2} - 2u_n)$$

En harmonisk bølge

$$u_n \sim e^{ikna - i\omega t}$$

gir

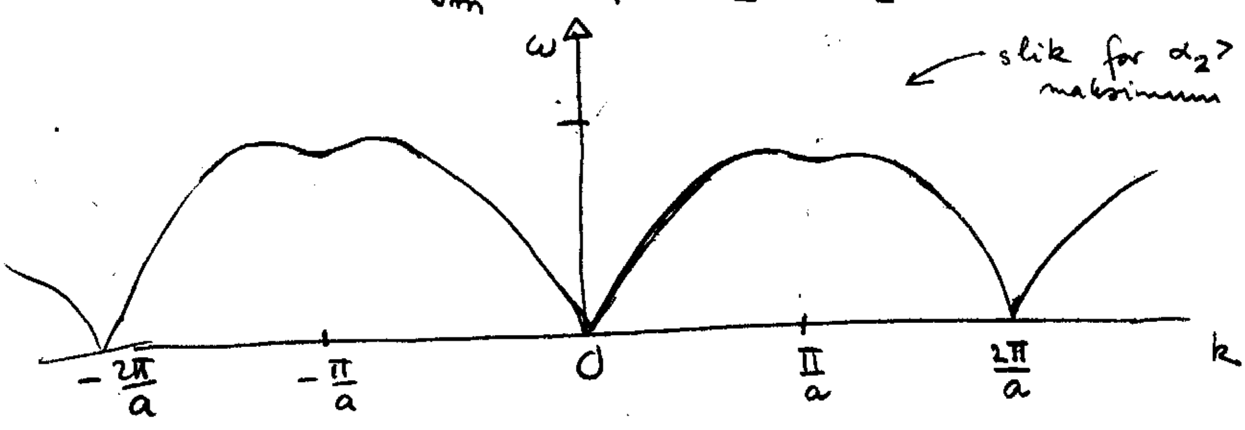
$$-m\omega^2 = \alpha_1 (e^{-ika} + e^{ika} - 2) + \alpha_2 (e^{-2ika} + e^{2ika} - 2)$$

$$= \alpha_1 (e^{ika/2} - e^{-ika/2})^2 + \alpha_2 (e^{ika} - e^{-ika})^2$$

$$= \alpha_1 (2i \sin \tfrac{ka}{2})^2 + \alpha_2 (2i \sin ka)^2$$

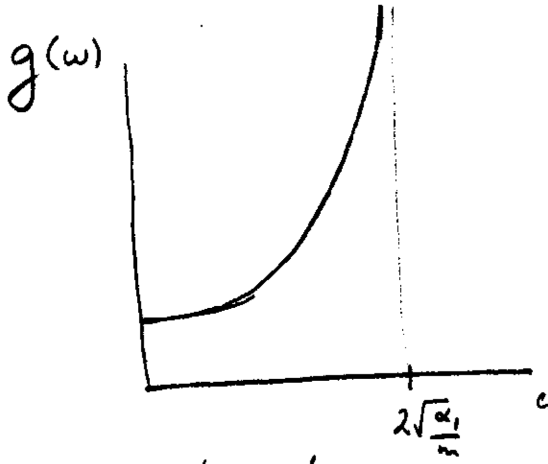
$$\omega = \frac{2}{\sqrt{m}} \sqrt{\alpha_1 \sin^2 \frac{ka}{2} + \alpha_2 \sin^2 ka}$$

slik for $\alpha_2 > \frac{\alpha_1}{4}$, enkelt maksimum ellers



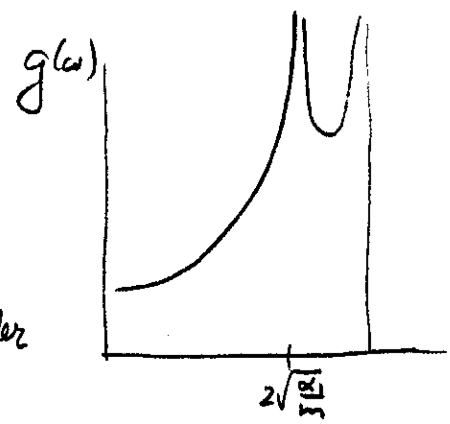
Vi kan begrense k til et intervall av lengde $2\pi/a$, da $k + 2\pi/a$ gir samme bølge som k, f. eks.

$$k \in \left(-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right).$$



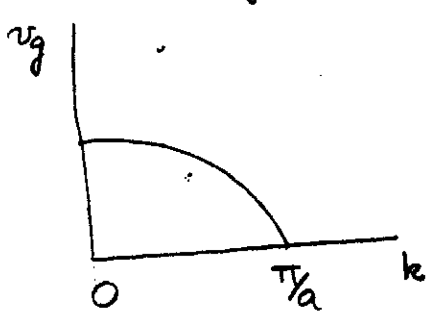
$\alpha_2 < \frac{\alpha_1}{4}$

eller

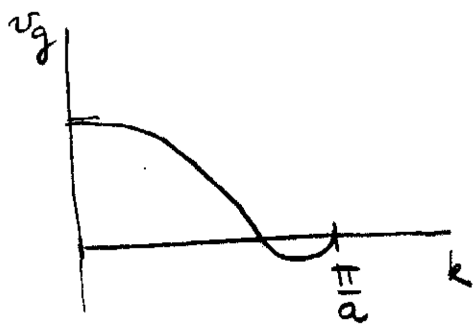


$\alpha_2 > \frac{\alpha_1}{4}$

Gruppehastighet $v_g = \partial\omega/\partial k$ (for $k<0$ har v_g mots. tegn)



$\alpha_2 < \frac{\alpha_1}{4}$



$\alpha_2 > \frac{\alpha_1}{4}$

Oppgave 5.

Det resiproke gitter består av alle vektorer $\vec{K}$ slik at planbølgen $e^{i\vec{K}\vec{r}}$ har periodisiteten til det gitte Bravaisgitter.

Hvis Bravaisgitteret er $\vec{R} = \sum_{i=1}^{3} n_i \vec{a}_i$ med heltallige n_i, må vi

$$e^{i\vec{K}\vec{R}} = 1 \quad \text{for alle } \vec{R} \in \text{Bravaisgitteret}$$

$\vec{K} \in$ det resiproke gitter

Det eksplitte forslag til konstruksjon er

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^{3} m_i \vec{b}_i ,$$

med $\vec{b}_1 = 2\pi \dfrac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\vec{a}_1 (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}$, osv.

Vi ser at $\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = 2\pi \, \delta_{ij}$.

Da er $\vec{K}\vec{R} = 2\pi \sum_{i=1}^{3} m_i n_i = 2\pi \cdot$ heltall og

$$e^{i\vec{K}\vec{R}} = e^{\text{heltall} \cdot 2\pi i} = 1 .$$

Altså oppspenner $\vec{b}_1 \vec{b}_2 \vec{b}_3$ det resiproke gitter.