UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Ansv.faglærer: P.C.Hemmer
Tlf.: 3648

EKSAMEN I FAG 72030 FASTE STOFFERS FYSIKK I

Lørdag 14.juni 1986
kl.0900-1600

Tillatte hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator
Rottmann: Mathematische Formelsammlung.

Oppgave 1

Gi en definisjon av det resiproke gitter til et gitt Bravaisgitter. Vis at det resiproke gitter kan genereres av de primitive vektorene

$$\vec{b}_1 = 2\pi \cdot v_B^{-1} (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$$

$$\vec{b}_2 = 2\pi \cdot v_B^{-1} (\vec{a}_3 \times \vec{a}_1)$$

$$\vec{b}_3 = 2\pi \cdot v_B^{-1} (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \quad ,$$

i k-rommet. Her er a_i primitive vektorer for det opprinnelige Bravaisgitteret, og

$$v_B = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) = \vec{a}_2 \cdot (\vec{a}_3 \times \vec{a}_1) = \vec{a}_3 \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)$$

er volumet av enhetscella i dette.

Oppgave 2

Et éndimensjonalt Bravaisgitter av identiske atomer med masse m har harmonisk vekselvirkning med kraftkonstant α mellom nærmeste naboer. Gitteravstanden er a.

a) Vis at bevegelseslikningene er

$m\ddot{u}_n = \alpha(u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n)$, alle n, og finn dispersjonsrelasjonen og gruppehastighet for bølgeforplantning i gitteret.

b) Vis sammenhengen mellom ovenstående atomære dynamikk og den makroskopiske svingelikning (bølgelikning)

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0 .$$

Oppgave 3

Et metall (volum V) betraktes i denne oppgaven som et system av frie og uavhengige elektroner i grunntilstanden, med elektrontetthet n.

a) Vis at Fermienergien ϵ_F er gitt ved

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}$$

b) Metallet påvirkes av et svakt magnetfelt H. Vis at den paramagnetiske susceptibilitet χ kan uttrykkes som

$$\chi = \mu_B^2 \mu_0 \, g(\epsilon_F)/V .$$

c) Denne susceptibiliteten er en funksjon av tettheten n, og kan skrives slik:

$$\chi = \gamma(a_0^3 n)^x .$$

Bestem både eksponenten x og den numeriske konstanten γ. Hvilken størrelsesorden har χ ?

Oppgave 4

I denne oppgaven skal vi studere en halvleder der bunnen av ledningsbandet har følgende isotrope form

$$\epsilon(\vec{k}) = \epsilon_\ell + \hbar^2 k^2/2m_\ell \ .$$

Likeledes er toppen av valensbandet gitt ved

$$\epsilon(\vec{k}) = \epsilon_v - \hbar^2 k^2/2m_v \ .$$

De effektive masser m_ℓ og m_v er ikke nødvendigvis like. Halvlederen er i termisk likevekt ved temperaturen T .

a) Finn et uttrykk for antallstettheten $n_e(T)$ av elektroner i ledningsbandet. Vis at når Ferminivået μ ligger tilstrekkelig under bunnen av ledningsbandet $(\epsilon_\ell - \mu >> kT)$ er

$$n_e(T) \simeq 2(m_\ell k_B T/2\pi\hbar^2)^{\frac{3}{2}} e^{(\mu-\epsilon_\ell)/k_B T}$$

Vis videre at når Ferminivået ligger tilstrekkelig over toppen av valensbandet er hullkonsentrasjonen

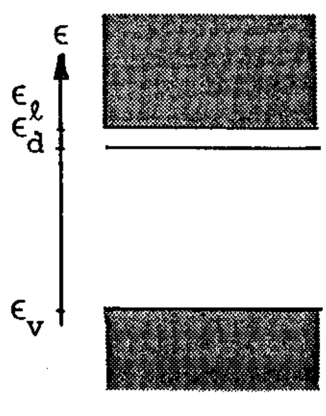
$$n_h(T) \simeq 2(m_v k_B T/2\pi\hbar^2)^{\frac{3}{2}} e^{(\epsilon_v-\mu)/k_B T} \ .$$

b) Beregn, for en udopet halvleder, og under ovennevnte forutsetning om at μ ikke ligger for nær en kant av det forbudte energigap, posisjonen av Ferminivået μ , og elektrontettheten n_e^i i ledningsbandet.

c) Anta nå at halvlederen er dopet med en donorkonsentrasjon d . La antallstettheten av ioniserte donoratomer være n_d . Beregn nå antall elektroner i ledningsbandet uttrykt ved n_d . (Forutsetningen om at μ ikke ligger for nær kanten av energigapet forutsettes fremdeles være gyldig).

d) Antallstettheten av donorelektroner som sitter i donornivåene antas ha følgende temperaturavhengighet

$$d - n_d = \frac{2d}{2 + e^{(\epsilon_d - \mu(T))/k_B T}}$$



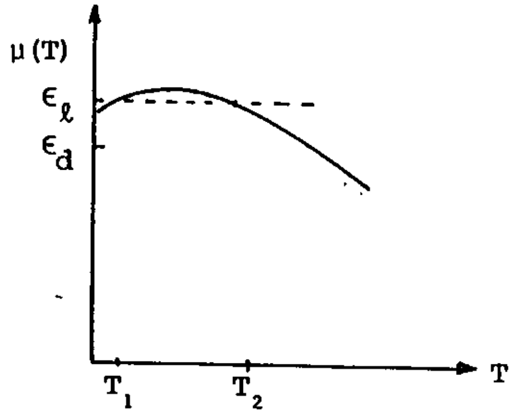
(Dette uttrykket er basert på at det er 3 mulige konfigurasjoner for hvert donoratom:

Enten er et donorelektron assosiert med atomet, i en av 2 degenererte tilstander med energi ϵ_d, eller så er intet donorelektron knyttet til atomet. Uttrykket skal ikke utledes.)

Sett opp en eksakt likning for sammenhengen mellom Ferminivå og temperatur, når valensbåndet antas fullt besatt. (Ikke forsøk for dette generelle tilfellet å beregne integralet som inngår i likninga).

Under spesielle forhold vil Ferminivået kunne anta verdier større enn ϵ_ℓ (se figuren).

Verifiser det ved å vise at det eksisterer fysiske parametre slik at når en setter $\mu=\epsilon_\ell$ i likningen mellom μ og T kan likningen tilfredstilles.



VEDLEGG

Noen av nedenforstående uttrykk og konstanter kan vise seg nyttige.

Midlere besettelsestall for fermioner:
$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_BT} + 1}$$

Midlere besettelsestall for fononer:
$$f(\omega) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_BT} - 1}$$

Nivåtetthet for frie elektroner ($\epsilon(\vec{k})=\epsilon_0+\hbar^2k^2/2m$):
$$g(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}(\epsilon-\epsilon_0)^{\frac{1}{2}}$$

Bohrradien:
$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} \simeq 0.53\text{Å}$$

Bohrmagneton:
$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$$

Finstrukturkonstanten:
$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$$

Lyshastigheten i vakuum:
$$c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-\frac{1}{2}} \simeq 3\cdot10^8 \text{ m/s}$$

Ved romtemperatur:
$$k_BT \simeq 1/40 \text{ eV}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} = \frac{\pi^2}{6} \; ; \; \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} e^{-x}dx=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \; ; \; \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{e^x+1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\zeta(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\sum_{n=1}^\infty n^{-\frac{3}{2}} \, .$$