UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

F.aman. K.Olaussen
Tlf. 3652

EKSAMEN I FAG 72031 FASTE STOFFERS FYSIKK I

Onsdag 20.august 1986

kl.0900-1600

Tillatte hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator
Rottmann: Mathematische Formelsammlung.

Oppgave 1

I denne oppgave ser vi på elastisk røntgenspredning på krystaller. Bølgevektoren for den innfallende stråle er $\vec{k}_i$ og for den spredte stråle $\vec{k}_s$.

a) For et enkelt kubisk gitter med gitterkonstant a tar betingelsen for å få konstruktiv interferens formen

$$\vec{k}_s - \vec{k}_i = \frac{2\pi}{a}(\hat{h}\vec{e}_x + \hat{k}\vec{e}_y + \hat{\ell}\vec{e}_z) \ ,$$

der $\hat{h}$, $\hat{k}$ og $\hat{\ell}$ er heltall. Vis dette.

b) Vis at uttrykket i a) leder til følgende resultat for spredningsvinkelen 2Θ (vinkelen mellom $\vec{k}_s$ og $\vec{k}_i$):

$$\sin^2\Theta = (\lambda/2a)^2(\hat{h}^2+\hat{k}^2+\hat{\ell}^2) \ ,$$

der λ er bølgelengden av røntgenstrålen.

c) Det er tatt Debye-Scherrer opptak av Mg_2Si som har kubisk enhetscelle. Følgende fem linjer observeres med CuKα-stråling med bølgelengde $\lambda=1.542$Å :

Linje nr.	1	2	3	4	5
$\sin^2\theta$	0.0434	0.0580	0.1168	0.1605	0.1750

Indisér linjene (dvs. bestem $\hat{h},\hat{k},\hat{\ell}$). Beregn gitterkonstanten a ut fra linjene med størst spredningsvinkel.

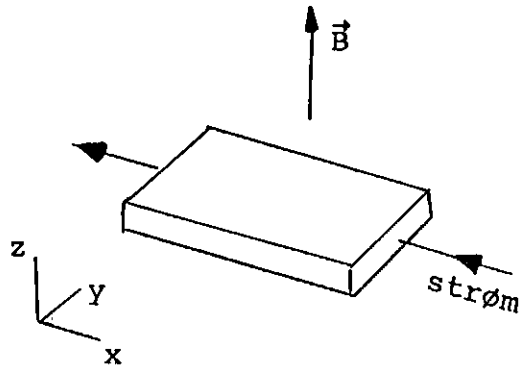
d) Resultatene i punkt c) viser at ikke ethvert sett heltall $\hat{h}\hat{k}\hat{\ell}$ gir opphav til en linje. Hvorfor ikke?
(Det er tilstrekkelig med en generell begrunnelse, uten beregninger for det konkrete tilfelle).

Oppgave 2

a) Hva er Halleffekten? Vis at Hallkoeffisienten $R=E_y/j_x B_z$ er gitt ved

$$R = -1/en_- ,$$

når ladningsbærerne er elektroner med antallstetthet n_- .



b) For en ekstrinsikk halvleder i et magnetfelt 0.6 Tesla måles en Hallspenning 4mV tversover et prøvestykke som er L_z=1mm tykt, L_y=5mm bredt og L_x=5cm langt. Strømmen i x-retning er 10 mA. Beregn antalltettheten av ladningsbærerne.

c) Generaliser uttrykket for Hallkoeffisienten R for det tilfelle at både negative og positive ladningsbærere er tilstede, med antallstetthet henholdsvis n_- og n_+ . De to typer ladningsbærere har (retningsuavhengige) mobiliteter μ_- og μ_+ .

d) Angi to eksperimentelle kjennetegn på en halvleder.
Bruk så bandstrukturen til å karakterisere en halvleder, og angi et kvantitativt estimat på forskjellen mellom halvleder og isolator (ved romtemperatur). Hva er forskjellen mellom en intrinsikk og ekstrinsikk halvleder?

Oppgave 3

a) For en gitt bølgelengde, hvor mange akustiske og optiske moder har en tredimensjonal krystall med p atomer i basis?

b) For en makroskopisk énkrystall bestående av $N=N_1N_2N_3$ celler pålegges vibrasjonsamplitudene $\vec{u}(\vec{R})$ periodiske grensevilkår,

$$\vec{u}(\vec{R}+\vec{a}_i N_i) = \vec{u}(\vec{R}) \ ,$$

der $i=1,2$ eller 3 og $\vec{a}_i$ er en primitiv gittervektor.
Bestem de tillatte bølgetallsvektorer $\vec{k}$ for en harmonisk bølge, uttrykt ved basisvektorene $\vec{b}_i$ i det resiproke gitter.
Hvor mange slike (ikke ekvivalente) $\vec{k}$-verdier representerer dette, og hva er modetettheten i $\vec{k}$-rommet (for hver gren og hver polarisasjonsretning)?

c) Skriv opp et integraluttrykk for den indre energi $U(T)$ for fononmodene i en krystall med frekvensfordeling $g(\omega)$. Vis at ved lave temperaturer er varmekapasitetsbidraget fra disse frihetsgradene gitt ved

$$C_V(T) \simeq V\, k_B \frac{2\pi^2}{15}\left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^3 \sum_{i=1}^{3} v_i^{-3} \ ,$$

under forutsetning av at langbølgelydhastighetene v_i for de 3 akustiske modene er konstante (uavhengig av retning og bølgetall).

Oppgave 4

a) Midlere feltteori for en $S=\frac{1}{2}$ (Ising) ferromagnet i et ytre felt $\vec{B}$ gir følgende relasjon mellom magnetiseringen M og temperaturen T:

$$M = ng\mu_B \tanh\left[\frac{g\mu_B}{k_B T}(B+\lambda M)\right]$$

der n er antall spinn pr.volumenhet og λ er relatert til vekselvirkningsenergien $J(\vec{r})$ mellom to spinn i avstand $\vec{r}$:

$$\lambda = \frac{1}{n\mu_B^2 g^2} \sum_{\vec{r}} J(\vec{r}) \quad .$$

Sett først det ytre felt $B=0$, og finn den kritiske temperatur T_c . Skisser også den spontane magnetiserings temperaturforløp.

b) Beregn videre susceptibiliteten χ for grensetilfellet at det ytre felt går mot null. Ved hvilken temperatur divergerer susceptibiliteten?

VEDLEGG

Noen av nedenforstående uttrykk og konstanter kan vise seg nyttige.

Midlere besettelsestall for fermioner: $$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} + 1}$$

Midlere besettelsestall for fononer: $$f(\omega) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

Nivåtetthet for frie elektroner $(\epsilon(\vec{k}) = \epsilon_0 + h^2k^2/2m)$: $$g(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}(\epsilon-\epsilon_0)^{\frac{1}{2}}$$

Bohrradien: $$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} \simeq 0.53\text{Å}$$

Enhetsladningen $$e = 1.602\cdot 10^{-19}\ \text{C}$$

Finstrukturkonstanten: $$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$$

Lyshastigheten i vakuum: $$c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-\frac{1}{2}} \simeq 3\cdot 10^8\ \text{m/s}$$

Ved romtemperatur: $$k_B T \simeq 1/40\ \text{eV}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} = \frac{\pi^2}{6}\ ;\quad \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}}\, e^{-x}dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\ ;\quad \int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\tanh x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots$$