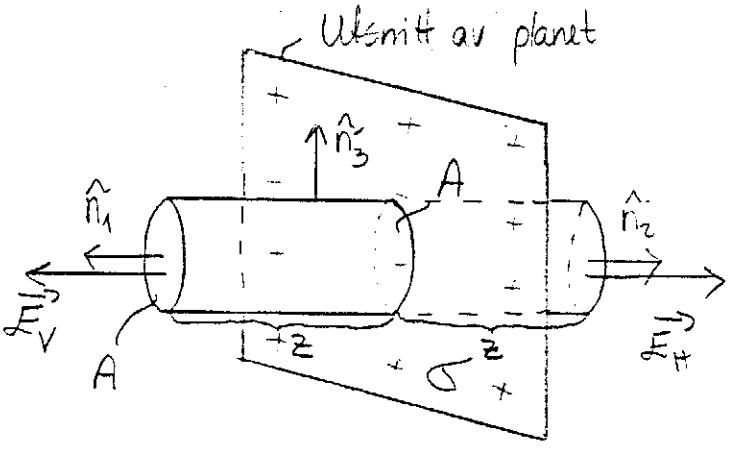
EKSAMEN JAN-95 MASKIN/MARIN

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a)



Gauss lov:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q/\varepsilon_0$$

For uendelig plan vil $\vec{E} \perp$ planet p.g.a. symmetrien. (I et vilkårlig punkt vil bidrag til den elektriske feltstyrken parallelt planet fra ladningen på hver side av punktet kansellere, mens bidragene normalt planet vil addere).

Fordi vi har et plan med uniformt fordelt ladning, vil $|\vec{E}_V| = |\vec{E}_H| = E$ når vi er i samme, konstante avstand(z) fra planet på hhv. venstre og høyre side.

Som Gaussflate er valgt en lukket sylinder med areal A på hver av endeflatene.

For sideflaten av sylinderen er $d\vec{A} = dA \cdot \hat{n}_3$

$\hat{n}_3 \perp \vec{E}_V$ og $\hat{n}_3 \perp \vec{E}_H$

$\Rightarrow$ Sideflaten av sylinderen gir ikke bidrag til integralet $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$

Bare bidrag fra endeflatene av sylinderen

$$\Rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_A \vec{E}_V \cdot \hat{n}_1 \, dA + \int_A \vec{E}_H \cdot \hat{n}_2 \, dA$$

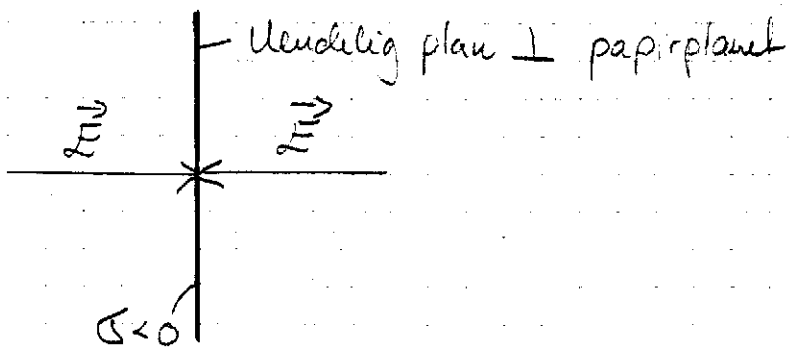
$$= E\cdot A + E\cdot A = 2EA$$

Gaussflaten omsluttet ladningen $Q = \sigma \cdot A$

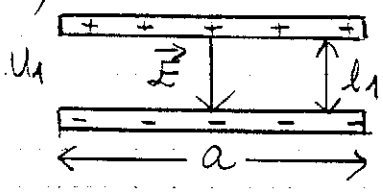
$$\Rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = 2EA = Q/\varepsilon_0 = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$\underline{\underline{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}} \qquad \text{q.e.d.}$$

For plan med ladning $\sigma < 0$



b)



Den elektriske feltstyrken

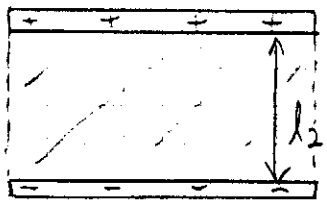
$$\underline{\underline{E}} = \frac{U}{d} = \frac{U_1}{l_1} = \frac{200\,V}{2.00\cdot 10^{-3}\,m} = \underline{\underline{100\,kV/m}}$$

Kondensatorens kapasitans

$$C_1 = \frac{\varepsilon A}{d} = \frac{\varepsilon_0 a^2}{l_1} = \frac{8{,}85\cdot 10^{-12}\,C/Vm\,(0{,}30\,m)^2}{2.00\cdot 10^{-3}\,m}$$

$$\underline{\underline{C_1 = 3{,}98\cdot 10^{-10}\,F}}$$

c)



$l_2 = 2l_1$

Ladningen er bevart:

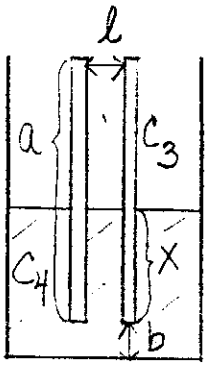
$C_1 = \frac{Q}{U_1}$; $C_2 = \frac{Q}{U_2}$

$$C_2 = \frac{Q}{U_2} = \frac{Q}{\frac{1}{3}U_1} = 3C_1$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon a^2}{l_2} = \frac{\varepsilon_0 \kappa a^2}{2l_1} = 3C_1 = 3\frac{\varepsilon_0 a^2}{l_1}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\kappa = 6.00}}$$

d)



Parallellkopling av to kondensatorer med kapasitansen C_3 og C_4:

$$C = C_3 + C_4$$

$$C_3 = \frac{\varepsilon_0}{l} a(a-x) \quad ; \quad C_4 = \frac{\varepsilon_v}{l} ax = \frac{\varepsilon_0 \kappa_v}{l} ax$$

$$\Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0}{l} a(a-x) + \frac{\varepsilon_0 \kappa_v}{l} ax = \frac{\varepsilon_0 a}{l}(a - x + \kappa_v x)$$

$$\underline{\underline{C}} = \frac{\varepsilon_0 a^2}{l}\left[1 + \frac{x}{a}(\kappa_v - 1)\right] = \underline{\underline{C_0\left[1 + \frac{x}{a}(\kappa_v - 1)\right]}}$$

C_0 er kapasitans uten vann til stede.

Vannivået i kondensatoren:

$$C = 30C_0 = C_0\left[1 + \frac{x}{a}(\kappa_v - 1)\right]$$

$$\frac{x}{a}(\kappa_v - 1) = 30 - 1$$

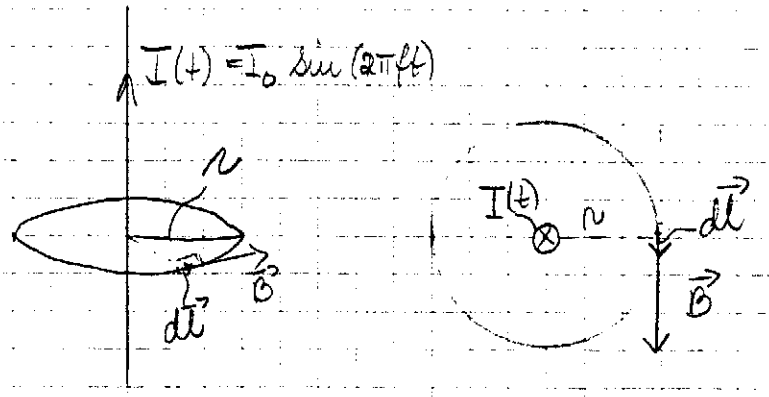
$$x = \frac{30-1}{\kappa_v - 1} a = \frac{30-1}{78.0-1} \cdot 30.0\,\text{cm} = 11.3\,\text{cm}$$

Vannivå over bunnen av tanken

$$\underline{\underline{h}} = x + b = (11.3 + 5.0)\,\text{cm} = \underline{\underline{16.3\,\text{cm}}}$$

Oppgave 2

a)



Ampere lov: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{innenfor}$

Pga. symmetrien er $\vec{B}(r)$ tangensiell til en sirkel med radius r sentrert på lederen. Sirkelen ligger i plan $\perp$ lederen. $|\vec{B}(r)|$ er konstant langs sirkelen.

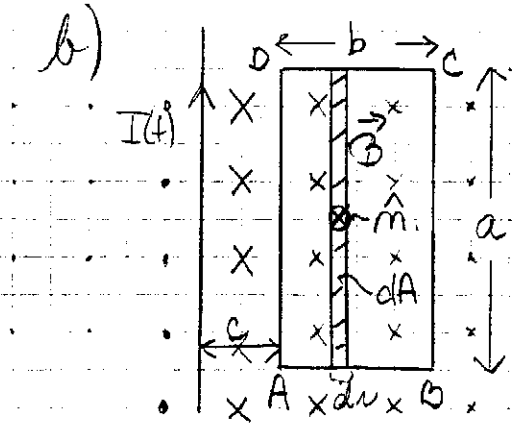
$\Rightarrow$ Velger en sirkel med radius r som integrasjonsvei (se fig.).
Langs integrasjonsveien $\vec{B} \parallel d\vec{l}$

$\Rightarrow$ Ampere lov gir dermed

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{innenfor} = \mu_0 I(t)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B}} = \frac{\mu_0}{2\pi r} I(t) = \underline{\underline{\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \sin(2\pi f t)}}$$

b)



Skal finne indusert emk i sløyfa pga. $I(t)$

Ser på tidspunkt der $I(t)$ går opp over

$\vec{B}$ pga innover i strømsløyfe planet

Velger ADCB som positiv omløpsretning i strømsløyfa.

Fluksen gjennom sløyfa:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \qquad d\vec{A} = a\,dr\,\hat{n}$$

For valgt omløpsretning $\vec{B} \parallel \hat{n}$

$$\Rightarrow \Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_c^{b+c} B \cdot a\,dr$$

$$\Phi_B = \int_c^{b+c} \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} a\,dr = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} a \int_c^{b+c} \frac{1}{r}\,dr$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} a \left[\ln r\right]_c^{b+c}$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} a \ln\left(\frac{b+c}{c}\right)$$

Indusert emk i sløyfa:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{b+c}{c}\right)\right]\frac{d}{dt}\left(I_0 \sin(2\pi f t)\right)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+c}{c}\right) \cdot 2\pi f I_0 \cos(2\pi f t)$$

$$\underline{\underline{\mathcal{E} = -\mu_0 a f \left[\ln\left(\frac{b+c}{c}\right)\right] I_0 \cos(2\pi f t)}} \quad \text{q.e.d}$$

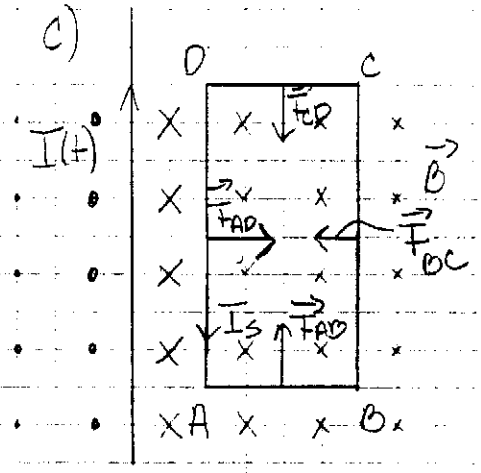
Amplituden til den induserte emken:

$$\mathcal{E}_{max} = \left|-\mu_0 a f \left[\ln\left(\frac{b+c}{c}\right)\right] I_0\right|$$

$$\mathcal{E}_{max} = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{H/m} \cdot 0.100\,\text{m} \cdot 60{,}0\,\text{s}^{-1}\left[\ln\left(\frac{5{,}00+2{,}50}{2{,}50}\right)\right] 250\,\text{A}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{E}_{max} = 2.0\,\text{mV}}}$$

c)



P.g.a. $I(t)$ har vi et tidsvarierende $\vec{B}$-felt gjennom strømsløyfa, som vir en induksjonsspenning beregnet under b) (Lenz lov). Emsen gir opphav til en strøm i løyfa. P.g.a denne strømmen vil det virke krefter på løyfa fra høyspentledningen.

Velger nå ABCD som positiv omløpsretning (motsatt retning ift pkt b)) $\Rightarrow \mathcal{E} = +\mu_0 a f \left[\ln\frac{(b+c)}{c}\right] I_0 \cos(2\pi f t)$

Velger et tidspunkt t slik at $I(t)$ går oppover og er økende. I dette tilfelle I_s i positiv omløpsretning iflg. Lenz lov.

Kreftene på strømløyfa p.g.a strøm i høyspentledn.:

Kreftene $\vec{F}_{AB}$ og $\vec{F}_{CD}$ er like store og motsatt rettede fordi strømmene i AB og CD til enhver tid er motsatt rettede (eller null) og AB og CD er i samme avstand fra høyspentledningen. $\Rightarrow$ Ingen netto kraft på løyfa $\parallel$ høyspentledningen.

Kreftene $\vec{F}_{AD}$ og $\vec{F}_{BC}$ er motsatt rettede (også p.g.a motsatt rettede strømmer) $|\vec{F}_{AD}| > |\vec{F}_{BC}|$ fr AD ligger nærmere høyspentledningen.

$\vec{F}_{AD}$ fastslår: Positiv retning på kraften

Kraft på ledningselement $d\vec{l}$ med strøm I p.g.a et magnetfelt $\vec{B}$ er gitt ved:

$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

For ledningene AD og BC er $\vec{B}$ konstant langs hele lengden $\vec{l}$: $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$

Kraft på AD: $|\vec{l}| = a$ $\quad \vec{l} \perp \vec{B}$ $\quad I = I_s$ $\quad B(r) = B(c)$

$$F_{AD} = I_s \cdot a B = \frac{\mathcal{E}}{R} a \cdot B(c)$$

$$F_{AD} = \frac{\mu_0 a l}{R}\left[\ln\left(\frac{b+c}{c}\right)\right] I_0 \cos(2\pi f t) \cdot a \frac{\mu_0}{2\pi c} I_0 \sin(2\pi f t)$$

$$F_{AD} = \frac{\mu_0^2 a^2 f}{2\pi R c} I_0^2 \left[\ln\left(\frac{b+c}{c}\right)\right] \sin(2\pi f t)\cos(2\pi f t)$$

Kraft på BC: $|\vec{l}| = a$ $\quad \vec{l} \perp \vec{B}$ $\quad I = I_s$ $\quad B(r) = B(b+c)$

$$F_{BC} = \frac{\mu_0^2 a^2 f}{2\pi R (b+c)} I_0^2 \left[\ln\left(\frac{b+c}{c}\right)\right] \sin(2\pi f t)\cos(2\pi f t)$$

Resultierende kraft på stangen

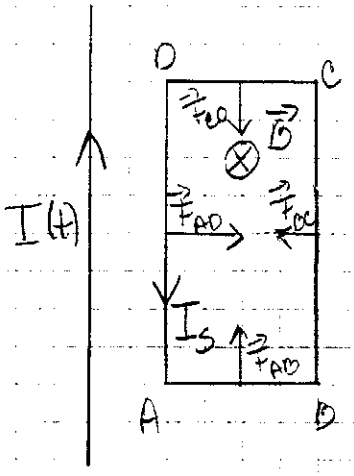
$$F = F_{AD} - F_{BC}$$

$$F = \frac{\mu_0^2 a^2 f}{2\pi R} I_0^2 \left[\ln\left(\frac{b+c}{c}\right)\right]\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b+c}\right) \underbrace{\sin(2\pi f t)\cos(2\pi f t)}_{\frac{1}{2}\sin(2\pi \cdot 2 f t)}$$

$$\underline{\underline{F = \frac{\mu_0^2 a^2 f}{4\pi R} I_0 \left[\ln\left(\frac{b+c}{c}\right)\right] \frac{b}{(b+c)c} \sin(4\pi f t)}}$$

Kommentar:

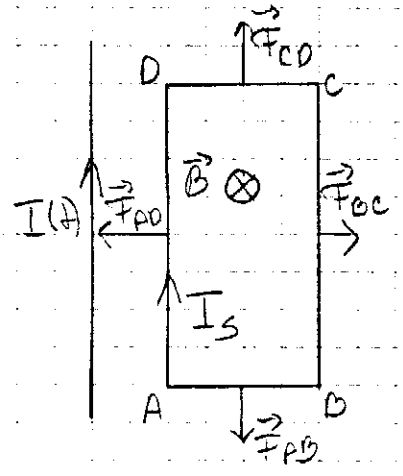
Kraften varierer mellom å være fastholdende og bremsende. Kraften varierer med frekvens $2f$ fordi indusert strøm er 90° ute av fase i ift påtrykt strøm B.



1) $I(t)$ oppover

$|I(t)|$ økende med t ; $I_S > 0$

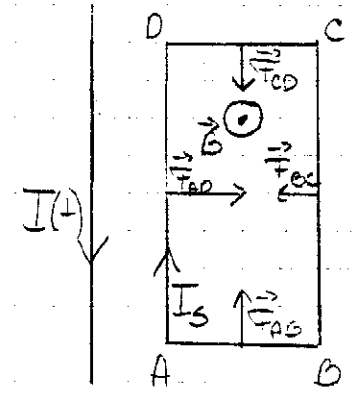
$\Rightarrow$ Resultantkraft frastøtende



2) $I(t)$ oppover

$|I(t)|$ avtagende med t ; $I_S < 0$

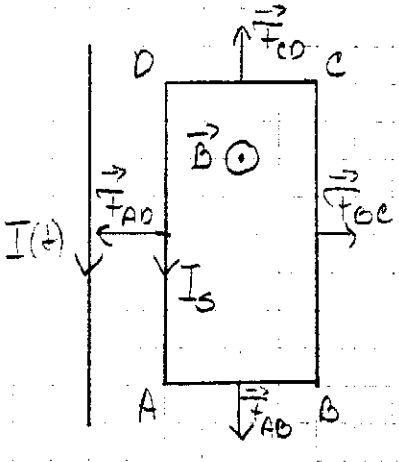
$\Rightarrow$ Resultantkraft tiltrekkende



3) $I(t)$ nedover

$|I(t)|$ økende med t ; $I_S < 0$

$\Rightarrow$ Resultantkraft frastøtende



4) $I(t)$ nedover

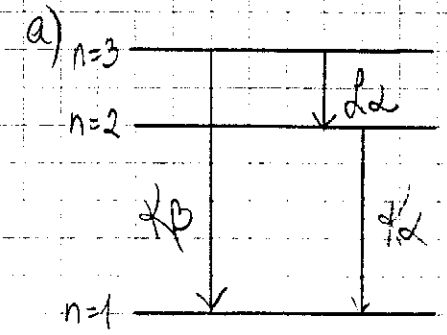
$|I(t)|$ avtagende med t ; $I_S > 0$

$\Rightarrow$ Resultantkraft tiltrekkende

(Den resultierende kraften er null for $I(t) = 0$ eller $I_S = 0$)

Oppgave 3

a)



Mangan Kβ-stråling:

$$E = hc/\lambda$$

$$\lambda_{K\beta} = \frac{hc}{E_{K\beta}} = \frac{6.626\cdot10^{-34}\,Js\cdot3.00\cdot10^{8}\,m/s}{6.51\cdot10^{3}\cdot1.60\cdot10^{-19}\,J}$$

$$\underline{\underline{\lambda_{K\beta} = 1.91\cdot10^{-10}\,m = 1.91\,Å}}$$

Mangan Lα-stråling:

$$\lambda_{L\alpha} = \frac{hc}{E_{L\alpha}} = \frac{6.626\cdot10^{-34}\cdot3.00\cdot10^{8}}{0.721\cdot10^{3}\cdot1.60\cdot10^{-19}}\,m$$

$$\underline{\underline{\lambda_{L\alpha}}} = 1.72\cdot10^{-9}\,m = \underline{\underline{1.72\,nm}}$$

Energien til Kα-overgangen:

$$\underline{\underline{E_{K\alpha}}} = E_{K\beta} - E_{L\alpha} = (6.51 - 0.721)\,keV = \underline{\underline{5.79\,keV}}$$

b) Fotoelektrisk effekt.

$$eV_0 = E_{k,max} = h\nu - \phi$$

1) For $\lambda_1 = 410\,nm$

$$E_{\lambda_1} = hf_1 = hc/\lambda_1 = \left(\frac{6.626\cdot10^{-34}\cdot3.00\cdot10^{8}}{410\cdot10^{-9}}\right)J$$

$$E_{\lambda_1} = 4.85\cdot10^{-19}\,J \quad (= 3.03\,eV)$$

$$\phi_{Na} = 2.28\,eV = 3.65\cdot10^{-19}\,J$$

Maksimal kinetisk energi for elektronene:

$$E_{k1} = hf_1 - \phi_{Na} = (4.85 \cdot 10^{-19} - 3.65 \cdot 10^{-19})\,J$$

$$\underline{\underline{E_{k1} = 1.20 \cdot 10^{-19}\,J = 0.75\,eV}}$$

Maksimal hastighet:

$$\underline{\underline{v_1}} = \sqrt{2E_{k1}/m_e} = \underline{\underline{5.13 \cdot 10^5\,m/s}}$$

2) For $\lambda_2 = 550\,nm$

$$E_{\lambda_2} = \frac{hc}{\lambda_2} = 3.60 \cdot 10^{-19}\,J = 2.25\,eV$$

Da fotonene med bølgelengde λ_2 har lavere energi enn frigjøringsarbeidet, emitteres ingen elektroner.

c) Bølgelengde λ for emittert lys er gitt ved

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

n_f : Sluttilstand for elektronet

n_i : Startilstand/initiell tilstand for elektronet

Sluttilstand $n_f = 3$

Lengst bølgelengde får vi for minimum energiforskjell, som svarer til at $n_i = 4$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_{max}} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) = 1.097 \cdot 10^7\,m^{-1}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda_{max}} = 469 \cdot 10^{-9}\,m = \underline{\underline{469\,nm}}$$

Bølgelengden λ_{max} ligger i det synlige området (blått lys).

Korteste bølgelengde har vi for maksimum energifoton, som svarer til at $n_i = \infty$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_{min}} = R\left(\frac{4}{3^2} - \frac{4}{\infty}\right) = 1{,}097 \cdot 10^7 m^{-1} \cdot \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda_{min}}} = 205 \cdot 10^{-9} m = \underline{\underline{205 nm}}$$

Bølgelengden λ_{min} ligger i det ultrafiolette området.

Oppgave 4

a) Konstruktiv interferens for

$$d \sin\theta = m\lambda \quad ; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

2. ordens hovedmaksimum : $m = \pm 2$

$\lambda_a = 589{,}0 nm$: $\underline{\underline{\theta_a = \pm \arcsin\left(\frac{2\lambda_a}{d}\right)}}$

$$\underline{\underline{\theta_a}} = \pm \arcsin\left(\frac{2 \cdot 589{,}0 \cdot 10^{-9} m}{2{,}500 \cdot 10^{-6} m}\right) = \underline{\underline{\pm 28{,}11^\circ}}$$

$\lambda_b = 589{,}6 nm$: $\underline{\underline{\theta_b = \pm \arcsin\left(\frac{2\lambda_b}{d}\right)}}$

$$\underline{\underline{\theta_b}} = \pm \arcsin\left(\frac{2 \cdot 589{,}6 \cdot 10^{-9} m}{2{,}500 \cdot 10^{-6} m}\right) = \underline{\underline{\pm 28{,}14^\circ}}$$

b) Antall hovedmaks er begrenset av at

$$|\sin\theta| \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{|m|\lambda_a}{d} \leq 1$$

$$|m| \leq \frac{d}{\lambda_a} = \frac{2{,}500 \cdot 10^{-6}}{589{,}0 \cdot 10^{-9}} = 4{,}244$$

$$\Rightarrow |m| \leq 4 \qquad m = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

<u>Det er mulig å observere 9 hovedmaksima for λ_a</u>

c) Utgår (svar: K er 500 spalter)

d) Diffraksjonsleddet gir null intensitet

for $\sin\theta_{diff} = \frac{m_{diff}\lambda}{D}$ $\quad m_{diff} \in \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$

Hvis vi velger D slik at $\sin\theta_{diff}$ er lik $\sin\theta_a = \frac{m\lambda}{d}$ (ɔ: $\theta_{diff} = \theta_a$) for λ_a og $m = 3$ i interferensleddet, får vi null intensitet i 3. ordens hovedmaksimum for λ_a.

$$\Leftrightarrow \quad \sin\theta_{diff} = \frac{m_{diff}\lambda_a}{D} = \sin\theta_a = \frac{3\lambda_a}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{m_{diff}}{D} = \frac{3}{d}$$

Størst spaltebredde får vi for $m_{diff} = 2$ idet $D < d$

I dette tilfellet

$$\underline{\underline{D_{max}}} = \frac{2d}{3} = \frac{2 \cdot 2{,}500 \cdot 10^{-6}\,m}{3} = \underline{\underline{1{,}667 \cdot 10^{-6}\,m}}$$