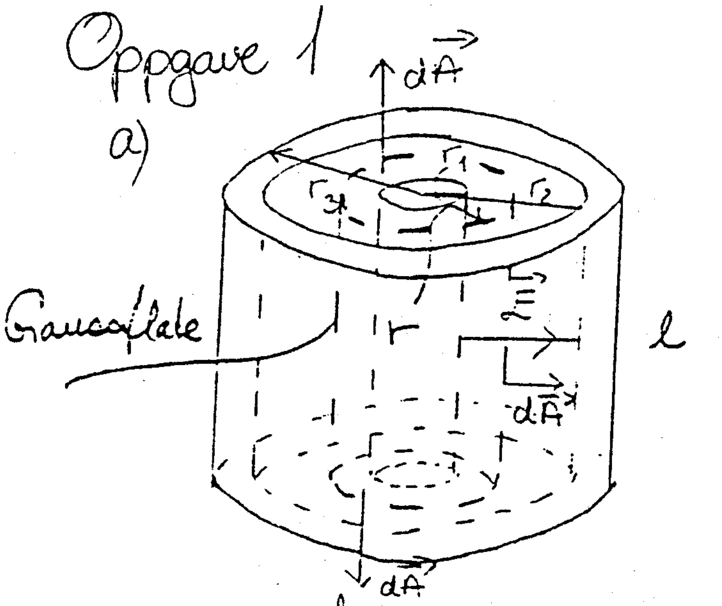
LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN AUG 1997
FAG 74142 FYSIKK

Oppgave 1

a)



$\vec{E}$ radielt rettet ut fra metallstaven (ser bort fra endeffekter i hver ende av kondensatoren)

i) Gaussflaten velges som en sylinder med endeflater i området der feltet skal beregnes (Snitt i figuren over)
$\vec{E} \parallel \vec{dA}$ på sylinderflaten og $\vec{E} \perp \vec{dA}$ på endeflatene.

Gauss lov for $r_1 < r < r_2$:

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{dA} = \int_{\text{syl.fl.}} \vec{E}\cdot\vec{dA} + \underbrace{2\int_{\text{endefl}} \vec{E}\cdot\vec{dA}}_{\vec{E}\perp\vec{dA} \Rightarrow 0} = \int_{\substack{\text{syl.fl.} \\ \vec{E}\parallel\vec{dA}}} E\,dA$$

og $|\vec{E}| = \text{konst}$ på syl. fl. pga. symmetri

$$\Rightarrow \oint \vec{E}\cdot\vec{dA} = E\int_{\text{syl.fl}} dA = E\cdot 2\pi r l = Q_{\text{innenfor}}/\varepsilon_0$$

$$Q_{\text{innenfor}} = Q \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}}} \qquad \text{q.e.d}$$

ii) Inni metall: $|\vec{E}| = 0$

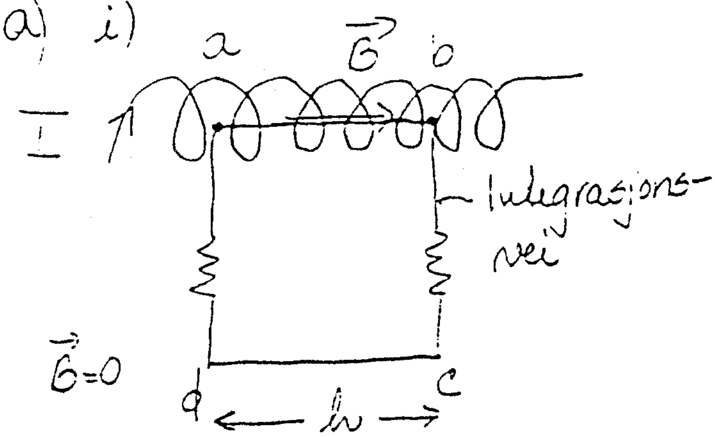
$$\Rightarrow \underline{\underline{E = 0 \text{ for } r < r_1 \text{ og } r_2 < r < r_3}}$$

For $r > r_3$: $Q_{\text{innenfor}} = Q - Q = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E = 0 \text{ for } r > r_3}}$$

Oppgave 2

a) i)



Ampères lov:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{innenfor}$$

Legger en lukket integrasjonsvei som vist på figuren. Linjestykket cd er lang unna spolen slik at magnetfeltet her er $\vec{B}=0$.

$$\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \underset{\substack{ab \\ \vec{B}\parallel d\vec{l}}}{\int} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \underset{\substack{bc \\ \vec{B}\perp d\vec{l}}}{\int} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \underset{\substack{cd \\ \vec{B}=0}}{\int} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \underset{\substack{da \\ \vec{B}\perp d\vec{l}}}{\int} \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_{ab} B\,dl \underset{\substack{B=\text{konst} \\ \text{langs } ab}}{=} B\cdot h = \mu_0 I_{innenfor} = \mu_0 \underbrace{\frac{I\cdot N}{l}}_{\substack{I\,\cdot\,\text{antall vindinger} \\ \text{pr. lengdeenhet}}} \cdot h$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B = \frac{\mu_0 N I}{l}}} \quad q.e.d$$

Feltretn. vist i figuren over.

ii) Spolens selvinduktans: $L = \dfrac{N\phi_B}{I}$

der $\phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} \underset{\substack{B=\text{konst} \\ \text{inni spoletverrsnitt}}}{=} B\cdot A = B\cdot \dfrac{\pi d^2}{4}$

$$\Rightarrow \underline{L} = \frac{N\mu_0 N I}{I l}\cdot\frac{\pi d^2}{4} = \underline{\underline{\frac{\mu_0 N^2 \pi d^2}{4l}}}$$

(Uttrykt ved dimensjoner, antall vindinger og μ_0)

b) Diff. lign.: $\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{1}{LC}q = 0$

med løsn. på formen $q = q_0 \cos(\omega t + \phi)$

i) $\frac{dq}{dt} = -q_0 \omega \sin(\omega t + \phi)$

$\frac{d^2q}{dt^2} = \div q_0 \omega^2 \cos(\omega t + \phi)$

Innsatt i diff. lign.: $\div q_0 \omega^2 \cos(\omega t+\phi) + \frac{1}{LC} q_0 \cos(\omega t + \phi) = 0$

$\Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \underline{\underline{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}}$ q.e.d

ii) Elektrisk feltenergi: $U_E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2C}q^2 = \frac{1}{2C} q_0^2 \cos^2(\omega t + \phi)$

Magnetisk feltenergi: $U_B = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}L\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}L q_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi)$

Total feltenergi: $U = U_E + U_B$

$U = \frac{1}{2C} q_0^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} L q_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi)$

$\omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \underline{\underline{U}} = \frac{1}{2C} q_0^2 \left[\cos^2(\omega t+\phi) + \sin^2(\omega t + \phi)\right] = \underline{\underline{\frac{1}{2C} q_0^2 = \text{konst.}}}$ q.e.d

c) i) Startbetingelser: (I) $I(t=0) = \frac{dq}{dt}_{t=0} = 0$

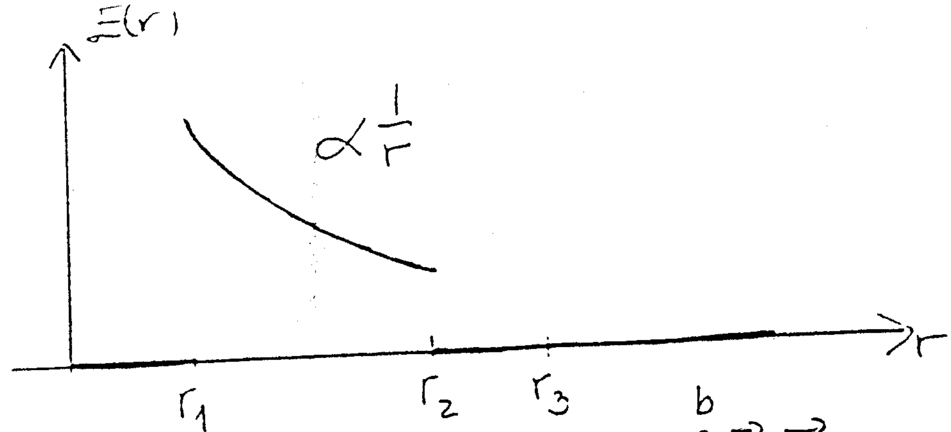
(II) $q(t=0) = Q$; ladn. på kondensator

(I) $\Rightarrow -q_0 \omega \sin\phi = 0$

$q_0 \omega \neq 0 \quad \Rightarrow \sin\phi = 0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{\phi = 0^\circ}}$

(II) $\Rightarrow \quad q_0 \cos\phi = \underline{\underline{q_0}} = Q$

iii)



b) i) Elektrisk potensial $V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot\vec{dl}$

$r > r_2$ $\quad V(r) - V(r_2) = -\int_{r_2}^{r} \vec{E}\cdot\vec{dl} = 0$ da $\vec{E} = 0$

Velger referansepunkt $V(r_2) = 0$ $\Rightarrow$ $V(r) = 0$ for $r \geq r_2$

$r_1 < r < r_2$ $\quad V(r_2) - V(r) = -\int_r^{r_2} \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_r^{r_2} E\,dr$ da $\vec{E} \parallel \vec{dl} = \vec{dr}$

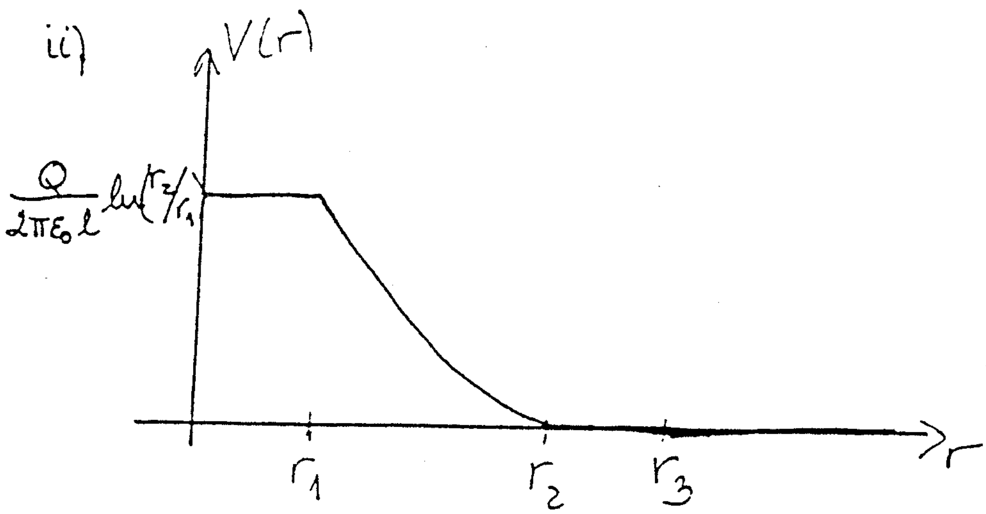
$$-V(r) = -\int_r^{r_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r' l}\,dr' = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln r' \Big]_r^{r_2}$$

$$V(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln(r_2/r) \qquad r_1 \leq r \leq r_2$$

$r < r_1$ $\quad V(r_1) - V(r) = -\int_r^{r_1} \vec{E}\cdot\vec{dl} = 0$ da $\vec{E} = 0$

$$\Rightarrow V(r) = V(r_1) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln(r_2/r_1) \qquad r \leq r_1$$

ii)



c) i) Har fans $C = Q/\Delta V$

ΔV er potensialforskjellen mellom metallstaven og sylinderen

$$\Delta V = V(r_1) - V(r_2) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln(r_2/r_1)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{C}} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln(r_2/r_1)} = \underline{\underline{\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(r_2/r_1)}}} = \underline{\underline{0{,}56\cdot 10^{-9}\,F}}$$

ii) Energiinnholdet i kondensatoren:

$$\underline{\underline{U}} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \underline{\underline{\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln(r_2/r_1)}} = \underline{\underline{1{,}12\cdot 10^{-3}}}$$

d)

Vi kan se på systemet som en parallelkobl av to kondensatorer, $C = C_1 + C_2$

$$\Rightarrow C = \frac{2\pi\varepsilon_0\, l/2}{\ln r_2/r_1} + \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\, l/2}{\ln r_2/r_1}$$

$$= \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln r_2/r_1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon_r\right)$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = U_c\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon_r\right)$$

Her er U_c energiinnholdet i oppgave c

$$\underline{\underline{U}} = 1{,}12\cdot 10^{-3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 80\right) = \underline{\underline{45{,}92\cdot 10^{-3}\,J}}$$

ii) Vi har funnet $q_0 = Q$ $\phi = 0$

$\Rightarrow$ Løsning:

$$q = Q_0 \cos \omega t$$

For $t = T/6$

$$q = Q_0 \cos 2\pi/6 = Q_0/2$$

$\phi = 0$

Elektrisk feltenergi $U_E = \frac{1}{2C} q_0^2 \cos^2 \omega t$

Magnetisk —"— $U_B = \frac{1}{2}\omega^2 L\, q_0^2 \sin^2 \omega t$

$$= \frac{1}{2C} q_0^2 \sin^2 \omega t$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{r}} = \frac{U_E}{U_B} = \frac{\cos^2 \omega t}{\sin^2 \omega t} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Oppgave 3

a) i) Fenomenet kalles (Fraunhofer) diffraksjon

ii) Nullpunkt for feller i intensitetsfordelingen lik null:

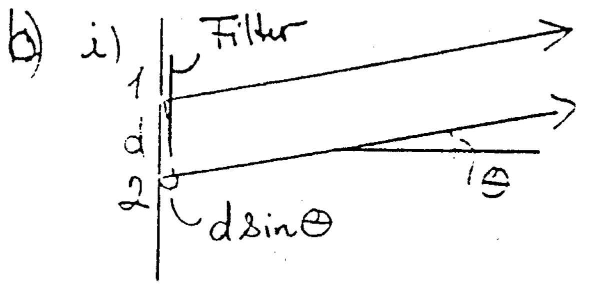
$$\sin(\beta/2) = 0$$

$\Rightarrow$ For $\beta/2 = n\pi = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$ med $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Nullpunkt for } \sin\theta = \frac{n\lambda}{a} \quad n = \pm 1, \pm 2}}, \ldots$

(Ikke nullpkt. for $n=0$ da $\frac{\sin\beta/2}{\beta/2} \to 1$ når $\beta/2 \to 0$, som svarer til sentralmaks. i diff. mønsteret)

iii. Når spaltebredden a øker blir avstanden mellom nullpkt. mindre da $\sin\theta \propto \frac{1}{a}$

b) i) 

Ser bort fra diffraksjon da $a < \lambda$.

Lys fra spalt 1: $E_1 = \frac{1}{2}E_0\cos\omega t$

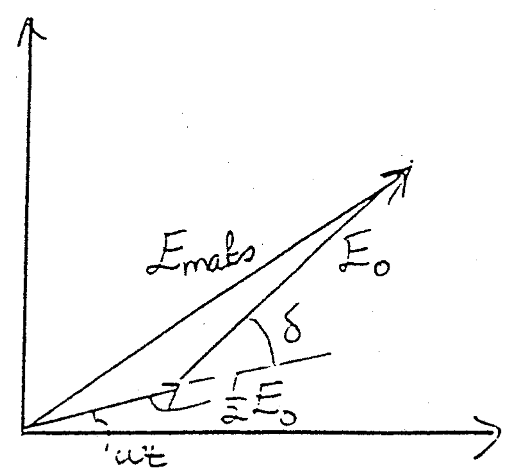
Lys fra spalt 2: $E_2 = E_0\cos(\omega t + \delta)$

der $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta = k\Delta r = kd\sin\theta$

Superposisjonsprinsippet for lyset i pkt. P:

$$E = E_1 + E_2$$

$$E = \frac{1}{2}E_0\cos\omega t + E_0\cos(\omega t + \delta)$$



Bruker viserdiagram for å finne resulterende amplitude:

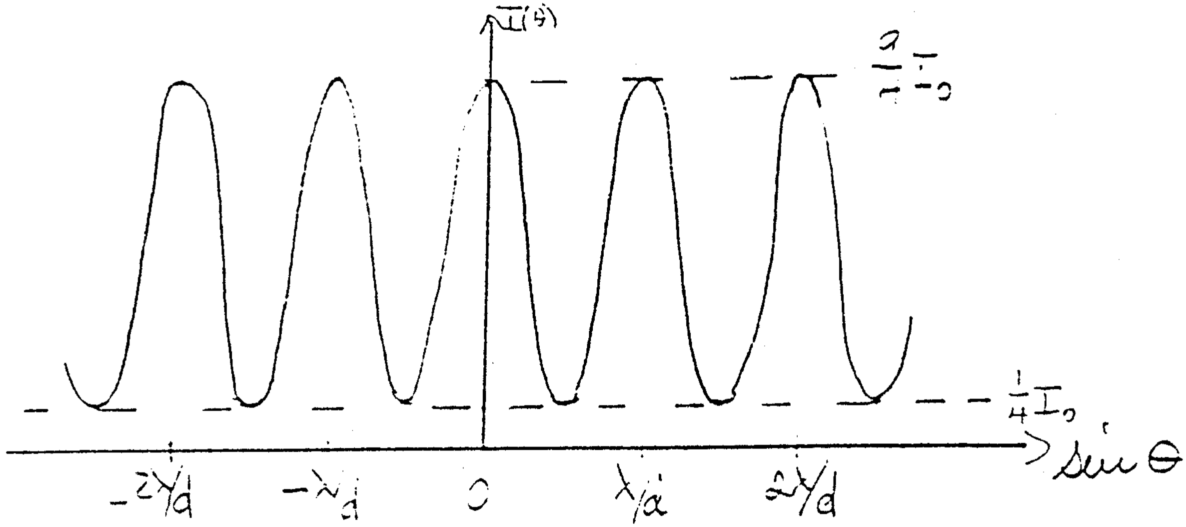
$$E_{maks}^2 = \frac{1}{2}E_0^2 + E_0^2 - 2\cdot\frac{1}{2}E_0E_0\cos(\pi -$$

$$E_{maks}^2 = \frac{5}{4}E_0^2 + E_0^2\cos\delta$$

Intensiteten $\underline{\underline{I}} = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_{maks}^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \left(\frac{5}{4} \quad \cos\delta\right)}}$

$$\underline{\underline{I = \underbrace{\frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2}_{I_0} \left(\frac{5}{4} + \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta\right]\right)}}$$

ii)



Sammenligning med dobbeltspalt:

Intensitet i hovedmaks $\frac{9}{4} I_0$ mot $4 I_0$ for dobbeltspalt

Intensitet i minima $\frac{1}{4} I_0$ mot 0 for dobbeltspalt.

Ellers likt. Forskjeller skyldes ulike amplituder på de to bølgende når filteret er til stede.