

# EKSAMEN I FAG 74142 FYSIKK 2, Fakultet for Bygg og –miljøteknikk, Fredag 12. desember 1997

Tid: kl. 0900 – 1300.

Tillatte hjelpemidler: B2- Typegodkjent kalkulator med tomt minne; O. Jähren og K.J. Knutsen: Formelsamling i matematikk; K. Rottmann: Matematische Formelsammlung; S. Barrett og T.M. Cronin: Mathematical Formulae; H.D. Young: University Physics, eller Benson: University Physics

## LØSNINGSFORSLAG

### OPPGAVE 1.

Forslag til poenggiving ved bedømming

a) Potensialet er gitt ved:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \cdot (5 - 4(r/R)^2) & \text{for } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{for } r > R \end{cases}$$

Generelt er  $\vec{E} = -\nabla V$ . Her velges kulekoordinater, og siden det er gitt at det er en sfærisk symmetrisk fordeling

er:  $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r$ , hvor  $\vec{e}_r$  er enhetsvektoren i radiell retning. Det elektriske feltet blir da:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{8Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{r}{R} \vec{e}_r & \text{for } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r & \text{for } r > R \end{cases}$$

Opptegning av feltet viser diskontinuitet ved  $r = R$

Ladningsfordelingen finnes ved å bruke Gauss lov for ulike  $r$ :

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dA} = \frac{Q_{inne}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho(x, y, z) dx dy dz = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

hvor ladningstettheten  $\rho(x, y, z) = \rho(r)$  på grunn av sfærisk symmetri, som gjør at volumelementet  $dx dy dz$  blir  $4\pi r^2 dr$ . Siden vi nå kjenner  $E(r)$ , og velger en sfærisk Gaussflate med sentrum i ladningsfordelingen, får en, først for  $r < R$ :

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dA} = \frac{8Qr 4\pi r^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{8Qr^3}{\epsilon_0 R^3} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(r) 4\pi r^2 dr. \quad \text{Ved å derivere begge sider av likn., får en: } \frac{24Qr^2}{\epsilon_0 R^3} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(r) 4\pi r^2$$

og omarbeidet:  $\rho(r) = \frac{6Q}{\pi R^3}$  for  $r < R$

Formen på  $E(r)$  (og  $V(r)$ ) for  $r > R$  er den samme som for en totalladning  $Q$  innenfor  $r \leq R$ ; dvs at det ikke er noe ladning i området  $r > R$ . Men, totalladningen for  $r < R$  er  $\frac{4}{3} \pi R^3 \rho(r) = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{6Q}{\pi R^3} = 8Q$ , dvs at det må være en overflateladning på  $-7Q$  for at dette skal være oppfylt. Oppsummert:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{6Q}{\pi R^3} & \text{for } r < R \\ -7Q & \text{for } r = R \\ 0 & \text{for } r > R \end{cases}$$

b) De flatene som er i kontakt med ladningen er karakterisert ved at  $\vec{E} \perp \vec{dA}$ ; dvs at fluksen:  $\Phi_E = \iint \vec{E} \cdot \vec{dA} = 0$  for disse 3 flatene. Fluksen gjennom de tre andre flatene finnes (lettest) ved å se på symmetrien: Disse tre flatene er lokalisert på samme måte i forhold til ladningen, og fluksen gjennom hver av de er like store. Ved å ta betrakte at den valgte kubene er en av 8 like kuber, hver med tre tilsvarende flater som har like stor fluks, finner en at fluksen for hver av disse flatene er 1/24 av den totale fluksen disse. Den totale fluksen finnes ved bruk av Gauss lov (f.eks. for en kuleflate), og en finner:

$$\Phi_E = \frac{1}{3 \cdot 8} \iint \vec{E} \cdot \vec{dA} = \frac{1}{24} \frac{Q}{\epsilon_0}$$

c) Elektrisk potensiell energi konverteres til kinetisk energi:  $q_p V = \frac{1}{2} m_p v^2$  Dette gir at hastigheten er:  $v = \left( \frac{2q_p V}{m_p} \right)$

Alternativt kan dette vises:

Kraften som aksellerer protonet i det elektriske potensialet er

$$F = q_p E = q_p \frac{V}{d} = m_p a.$$

For aksellerasjonen gjelder:

$$s = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \frac{q_p V}{d m_p} t^2 = d; \text{ Dvs, at tiden det tar fra } s=0 \text{ til } s=d \text{ er: } t = \sqrt{\frac{2d^2 m_p}{q_p V}} \text{ og hastigheten ved inngang til}$$

magnetfeltet er:  $v = v_0 + at = 0 + \frac{q_p V}{m_p d} \sqrt{\frac{2d^2 m_p}{q_p V}} = \sqrt{\frac{2q_p V}{m_p}}$ . Med numeriske verdier fås:

$$v = \sqrt{\frac{2q_p V}{m_p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.610^{-19} \text{ C} \cdot 3000 \text{ V}}{1.6710^{-27} \text{ kg}}} = \sqrt{5.7510^{11} \text{ CV} / \text{kg}} = \sqrt{5.7510^{11} \text{ As}(\text{kg m}^2 / \text{As}^3) / \text{kg}} = 7.5810^5 \text{ m/s}$$

Vi finner treffposisjon på den fotografiske platen ved å se på sirkelbevegelsen i et magnetfelt. Da gjelder at protonet vil følge en sirkelbane med radius  $R_p$ :

$$R_p = \frac{m_p v}{q_p B}; \text{ og vil treffe den fotografiske platen i en avstand } 2R_p \text{ fra aperturen: } 2R_p = 2 \frac{m_p}{q_p B} \sqrt{\frac{2q_p V}{m_p}} = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2m_p V}{q_p}}. \text{ Med}$$

$$\text{numerisk tall finnes: } 2R_p = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2m_p V}{q_p}} = \frac{2 \cdot 1.6710^{-27} \text{ kg} \cdot 7.58 \cdot 10^5 \text{ m/s}}{0.4 \text{ T} \cdot 1.6010^{-19} \text{ C}} = 3.9310^{-2} \text{ m}.$$

d) Fra utledningen i oppgave c), har en partikkel med masse og ladning som et proton treffer skjermen i en avstand:

$$2R_p = 2 \frac{m_p}{q_p B} \sqrt{\frac{2q_p V}{m_p}} = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2m_p V}{q_p}}$$

Denne er utledet uten noen antakelse, og er derfor gyldig generelt. For forholdet mellom denne og en ukjent partikkel får en:

$$\frac{2R_x}{2R_p} = \left( \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2m_x V}{q_x}} \right) / \left( \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2m_p V}{q_p}} \right) = \sqrt{\frac{m_x q_p}{m_p q_x}}$$

Når ladningen på de to ukjente partiklene er  $2 q_p$ , fås:

$$\frac{2R_x}{2R_p} = \sqrt{\frac{m_x q_p}{m_p q_x}} = \sqrt{\frac{m_x q_p}{m_p 2q_p}} = \sqrt{\frac{m_x}{2m_p}}; \text{ eller rearrangert: } m_x = 2m_p \left( \frac{2R_x}{2R_p} \right)^2$$

For de to observerte flekkene har vi:  $2R_x = 2.5 R_p$ , og  $5 R_p$ ; får en:

$$m_x = 2m_p \left( \frac{2.5R_p}{2R_p} \right)^2 = 3.1m_p; \quad m_x = 2m_p \left( \frac{5R_p}{2R_p} \right)^2 = 12.5m_p$$

$$m_1 = 5.2 \cdot 10^{-27} \text{ kg}; \quad m_2 = 2.09 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

## OPPGAVE 2.

a) Den magnetiske fluks gjennom den lukkede sløyfen er gitt ved:

$$\phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

For situasjonen er  $d\vec{A} = dA \vec{k}$ , og vi kan beregne fluksen ved å dele opp det totale magnetfeltet i de to komponentene med retningen parallelt y og z-aksen. For komponenten av  $B$  langs y-aksen er  $\vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$  og for komponenten av  $B$  langs z-aksen er  $\vec{B} \cdot d\vec{A} = B dA$ . Siden avstanden  $D$  mellom skinnene er konstant, er  $dA = D dx$ , og integrasjonen går fra  $x=0$  til  $x=vt$ . Dette gir:

$$\phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 3DB_0 \int_{x=0}^{vt} (1 + \beta x) dx = 3DB_0 \left( vt + \frac{\beta(vt)^2}{2} \right) = 3DB_0 vt \left( 1 + \beta vt/2 \right)$$

Av resultatet ser en at for den tidsavhengige grensen  $\beta > -2/vt$  vil fluksen være positiv, mens for  $\beta < -2/vt$  vil den magnetiske fluksen ha motsatt fortegn.

b) Den induerte elektromotoriske kraften setter opp en strøm som finnes ved å bruke Faraday's lov. Den elektromotoriske kraften er gitt ved:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

Ved innsetting av uttrykket for den magnetiske fluksen finner en:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d(3DB_0vt(1+\beta vt/2))}{dt} = -3DB_0v(1+\beta vt)$$

Strømmen settes opp i en krets som har en motstand  $R$  som øker med økende tid:

$$R = D(\lambda + \lambda_A) + 2x\lambda = D(\lambda + \lambda_A) + 2\lambda vt$$

hvor det første leddet skyldes spesifikk motstand i forbindelsesskinnen samt den staven som dras, og det tidsavhengige leddet skyldes den økende motstanden som inkluderes i kretsen ved at staven A-A forflytter seg, og faktoren 2 i dette leddet kommer av at begge skinnene må tas med. Den induerte strømmen blir da:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{3DB_0v(1+\beta vt)}{D(\lambda + \lambda_A) + 2\lambda vt}, \quad t > 0$$

Retningen på strømmen finnes ved å bruke Lenz lov. For den tidsavhengige grensen  $\beta > -1/vt$  (som går mot 0 for store  $t$ ) vil den induerte strømmen gå med klokka, og for  $\beta < -1/vt$  vil den gå i motsatt retning. Dvs., at for en negativ verdi av  $\beta$  vil en få en endring av stømretningen ved et tidspunkt  $t_r$  som er gitt ved  $t_r = -1/(\beta v)$

c) Kraften på staven A-A finnes fra:

$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B}$$

hvor  $\vec{l}$  er retningsvektoren langs staven A-A, og som har samme retning som strømmen. For positiv  $\beta$  er  $\vec{l} = -D \vec{j}$ .

y-komponenten av magnetfeltet er parallell med  $\vec{l}$  og vil derfor ikke gi noe bidrag til kraften. Kraften blir:

$$\vec{F} = \frac{9D^2 B_0^2 v(1+\beta vt)^2}{(D(\lambda + \lambda_A) + 2\lambda vt)} \vec{i}$$

Dvs at kraften er rettet i positiv x-retning. Det samme svaret gjelder for negative  $\beta$  verdier og  $t < t_r$ . Grensen  $t > t_r$  for negative  $\beta$  gir også positiv kraft fordi både  $B$ , og  $I$  har skiftet retning.

### OPPGAVE 3

a) Bohrs atommodell beskriver at elektronen beveger seg i stasjonære baner som kan beskrives ved klassisk mekanikk, at sentripetaleksellerasjonen kommer frem ved kraften satt opp av det elektriske felt:  $\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  og den totale mekaniske energi til elektronet er gitt ved  $E = K + U = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$ . Utsendelse av lys forekommer ved overganger mellom stasjonære baner (til lavere energi), og energien til lyset er gitt ved:  $hc / \lambda = \Delta E$ . Vi kommer fram til likningen ved å bruke et resultat fra kvantemekanikken: vinkelmomentet til elektronet er kvantisert i heltallsmultipler av  $h/2\pi = \hbar$ ;  $m_e v r = n \hbar$ ; hvor n er et kvantetall, og h er Planck's konstant. Dette gir at tillatte energinivåer til elektronet (slik som i hydrogen) er gitt ved:  $E_n = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n^2}\right)$ , og at bølgelengdene til det utsendte lyset er gitt ved  $hc / \lambda = E_n - E_m = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ . Ved innsetting av numeriske tall finner en:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

hvor Rydbergs konstant  $R = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ . Overgangene som er observert tilsvarende  $m=3, n=2$  ( $\lambda_a = 656.2 \text{ nm}$ ) og  $m=4, n=2$  ( $\lambda_b = 486.1 \text{ nm}$ )

b) Formelen  $I = I_0 \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)}$  gjelder for intensitetsfordelingen I, fra ett gitter med N spalter, i en retning  $\theta$  som gir opphavs til en gangveiforskjell  $\delta = d \sin \theta$  mellom lys fra nabo-spalter, og  $I_0$  er intensiteten for lyset fra en spalte

#### IKKE KRAV

Dette vises ved å tegne N-vektorer etter hverandre, med innbyrdes vinkel  $\varphi$ , hver av vektorene har lengde  $E_0$ . Netto-resultatet finnes ved å tegne en omskrevet sirkel til disse vektorene, resultatene settes opp som  $E_T = 2R \sin(N\varphi/2)$ , R elimineres ved bruk av  $E_0 = 2R \sin(\varphi/2)$ , som gir  $E_T = E_0 \sin(N\varphi/2) / \sin(\varphi/2)$  som ved kvadrering og identifisering  $E_0^2 = I_0$ , gir resultatet. Hovedmaksima i interferensmønsteret observeres ..

SLUTT IKKE KRAV TIL LØSNING:

når  $\varphi = 2m\pi$  hvor  $\varphi$  er faseforskjellen som skyldes gangveiforskjell for lys som passerer nabo-spalter:

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin(\theta) = 2m\pi; \quad d \sin \theta = m\lambda; \quad \text{Når vi har observert avstanden mellom nabo-interferens maksima for 5}$$

mm, vil det si at d kan beregnes ved:  $d = \lambda / \sin \theta$ , med de små vinkler vi har her er  $\sin \theta \approx \tan \theta = y / L$ , og d

$$d = \lambda L / y = 0.6562 \cdot 1000 / 5 \mu\text{m} = 131.2 \mu\text{m} = 0.131 \text{mm}.$$

c)

Anta at  $N = 2$ ; har da et dobbeltspalte eksperiment, og gangveiforskjell samt forskjell i optisk veilengde på grunn av 1 gangs passering gjennom den tynde filmen i forhold til den som ikke passerer den tynde filmen er gitt ved:

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \left( d \sin \theta - (n_a - 1) \frac{t_f}{\cos \theta} \right) = \varphi - \frac{2\pi}{\lambda} (n_a - 1) t_f = \varphi - \mathcal{G}.$$

Denne utledes ved å se på følgende bidrag: retningsbidrag (som over), samme fysiske avstand gjennom en trykkelse av filmen med en bølgelengde som avhenger av brytningsindeksen for den lysstrålen som passerer gjennom filmen og  $n = 1$  for den som går utenom. I vår situasjon er vinklene små, vi kan regne (som over) at  $\sin \theta \approx \tan \theta = y / L$ , og under denne Betingelsen for konstruktiv interferens er som tidligere at fasevinkelen må være et heltalls multiplum av  $2\pi$ . Dette gir:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \left( d \sin \theta - (n_a - 1) \frac{t_f}{\cos \theta} \right) = 2m\pi; \quad d \sin \theta - (n_a - 1) \frac{t_f}{\cos \theta} = m\lambda$$

Med innsetting av  $\sin \theta \approx \tan \theta = y / L$ ;  $\cos \theta \approx 1$ ; og omregning finner en:

$$t_f = \frac{1}{n_a - 1} (d \sin \theta - m\lambda) = \frac{1}{n_a - 1} \left( d \frac{y}{L} - m\lambda \right); \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Det er observert en forskyvning på  $\Delta y = 2.5$  mm (langs y-aksen på observasjonsskjermen) ved innsetting av filmen. I utgangspunktet veit en ikke om dette tilsvarer samme interferensmaksima. Ser derfor først på størrelsen

$$\frac{d\Delta y}{L} = \frac{131.2 \mu\text{m} \cdot 2.5\text{mm}}{1000\text{mm}} = 327.5\text{nm}.$$

En ser av dette at minste tykkelse av filmen er gitt ved  $m=0$  og  $t_f = 393 / 0.63 = 519.8 \text{ nm} \approx 520 \text{ nm}$ .

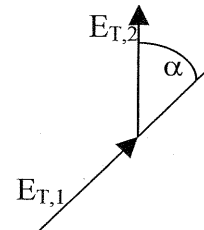
Uttrykkene over er utledet i tilfellet med dobbeltspalte; la oss sjekke om dette er gyldig også for flere spalter. For det generelle tilfellet med  $N$ -spalter vil en ved hjelp av viserdiagram vise at situasjonen kan beskrives med  $N/2$  visere med innbyrdes faseforskjell  $\varphi$  (gitt kun av den retningsavhengige gangveiforskjellen), etterfulgt av  $N/2$  visere (for de som passerer filmen) med samme innbyrdes faseforskjell. Absoluttverdien av amplituden til hver av disse resultantene er (jfr oppgitt uttrykk for intensiteten):

$$E_{T,1} = E_0 \sin(N\varphi/4) / \sin(\varphi/4); \quad E_{T,2} = E_0 \sin(N\varphi/4) / \sin(\varphi/4);$$

Vinkelen mellom den siste av viseren som ikke passerer filmen, og den første som passerer filmen er  $(\varphi - \vartheta)$

Vinkelen  $\alpha$  mellom  $E_{T,1}$  og  $E_{T,2}$  er:

$$\alpha = \left(\frac{N}{2} - 1\right) \frac{\varphi}{2} + (\varphi - \vartheta) + \left(\frac{N}{2} - 1\right) \frac{\varphi}{2} = \frac{N\varphi}{2} - \vartheta$$



Intensitetsfordelingen med filmen innsatt blir kvadratet av vektorsummen:

$$I = E_T^2 = (E_{T,1} + E_{T,2} \cos \alpha)^2 + (E_{T,2} \sin \alpha)^2 = E_{T,1}^2 + E_{T,2}^2 + 2 E_{T,1} E_{T,2} \cos \alpha = 2 \frac{E_0^2 \sin^2(N\varphi/4)}{\sin^2(\vartheta/4)} (1 + \cos(N\varphi/2 - \vartheta))$$

Dvs., en intensitetsfordeling som interferensmønsteret for  $N/2$  spalter modulert med funksjonen  $(1 + \cos(N\varphi/2 - \vartheta))$ , det er denne siste funksjonen som varierer raskest, og vi regner som at det er maksima i denne som er avgjørende for posisjon til maksima i totalmønsteret. Får da følgende betingelse for maksima med filmen:



$$N\varphi/2 - \vartheta = 2n\pi \quad N \geq 2$$

Men: stringent krav om at  $2N$  skal være et heltall ut fra at vi dekte de  $N/2$  øverste spaltene, vil vi alltid ha et minimum pga første ledd, ved  $\varphi = m\pi$ ; som gjør at observasjonen over ikke kan være observert for  $N \geq 2$ .

d) Oppløsningskravet sier oss at ved en økning av filmtykkelsen på 20 nm, trenger vi forskyvning i posisjonen til interferensmaksima på skjermen som er minst lik avstand fra et interferensmaksimum til nærmeste minimum ved de  $N$ -spaltene gitteret består av. Uten filmen innsatt er betingelsen for minima:

$$\varphi = \frac{2p\pi}{N}, \quad p = 1, 2, 3, \dots; \quad p \neq N, 2N.$$

Maksima:  $\frac{2\pi}{\lambda} \left( d \frac{y}{L} \right) = 2m\pi$ ; Nærmeste minina:  $\frac{2\pi}{\lambda} \left( d \frac{y + \Delta y_2}{L} \right) = \frac{2p\pi}{N}$ ;

Differanse  $\frac{2\pi}{\lambda} \left( d \frac{\Delta y_2}{L} \right) = \frac{2p\pi}{N} - 2m\pi$ ; Betingelsen 'nærmeste minima og tilhørende maksima' uttrykkes matematisk ved

$p = mN + 1$ . Dette gir:  $\Delta y_2 = \frac{L\lambda}{dN}$

Forskyvning i interferensmaksima ved 20 nm økelse av filmtykkelsen:  $\Delta y_1 (\Delta t_f = 20nm)$  finnes ved å bruke uttrykket over for interferensmaksima:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{Ndy}{2L} - (n_a - 1) \cdot t_f \right) = 2m\pi$$

Forskyvning i posisjonen til interferensmaksima ved endring av filmtykkelse  $\Delta t_f$  er:  $\Delta y_1 = \frac{2L}{Nd} (n_a - 1) \Delta t_f$

Avstanden mellom posisjonen til et observert nærmeste minima og det tilhørende maksima er:

Kravet gir nå at  $\Delta y_1 \geq \Delta y_2$ , som gir at:

$$\Delta y_1 = \frac{2L}{Nd} (n_a - 1) \Delta t_f \geq \frac{L}{d} \frac{\lambda}{N} = \Delta y_2 ;$$

Svar: Oppløsningen (rigorøst) er uavhengig av N; og det er ikke mulig å oppnå gitte spesifikasjoner. Dvs., at oppløsningen (i den tilnærnelsen vi betrakter her) er uavhengig av antall spalter.

Oppløsningsgrensa for filmtykkelsen  $\Delta t_f$  er

$$\Delta t_f = \frac{Nd}{2L} \frac{\Delta y_1}{(n_b - 1)} = \frac{\lambda}{2(n_b - 1)}$$
 hvor kriteriet for oppløsningsgrensa  $\Delta y_1 = \Delta y_2$  er brukt ved overgangen.

Numerisk svar for gitteret  $\Delta t_f(n_b) = 486.1 \text{ nm} / (2 \cdot 0.63) = 324. \text{ nm}$ . Dvs., bruk den korteste bølgelengdene for å få bedre oppløsning.