Eksamen i 74142 Fysikk 2
Fakultet for fysikk og miljøteknikk
Mandag 6. desember 1999

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1.

$$V(r) = \frac{\rho_0 a^2}{18\varepsilon_0}\left(1 - 3\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{a}\right)^3\right) \qquad r \le a$$

$$V(r) = 0 \qquad r > 0$$

ρ_0: konstant, enhet C/m^3, a: m.

a) $\vec{E} = -\nabla V$

Siden vi har sfærisk symmetri er

$$\vec{E} = E_r \hat{e}_r = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{e}_r$$

hvor $\hat{e}_r$ er enhetsvektor i radiell retning.

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\rho_0 a^2}{18\varepsilon_0}\left(-6\left(\frac{r}{a}\right)\cdot\frac{1}{a} + 6\left(\frac{r}{a}\right)^2\cdot\frac{1}{a}\right) \qquad r \le a$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 0 \qquad r > a$$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 a}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r}{a} - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\hat{e}_r & r \le a \\ 0 \quad \hat{e}_r & r > a \end{cases}$$

$|\vec{E}(r)|$ kontinuerlig ved $r = a$?

i) $r \le a$:

$$\lim_{r \to a^-} |\vec{E}(r)| = \frac{\rho_0 a}{3\varepsilon_0}\left(\frac{a}{a} - \left(\frac{a}{a}\right)^2\right) = 0$$

ii) $r \ge a$ $\quad \lim_{r \to a^+} |\vec{E}(r)| = 0$

Feltet er kontinuerlig ved $r = a$.

b) Ladningsfordelingen $\rho(r)$ finnes ved å bruke Gauss lov:

$$\oint\!\!\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q_{inne}/\varepsilon_0$$

Siden vi har sfærisk symmetri velges en sfærisk Gaussflate. Da er $d\vec{A} = \hat{e}_r \cdot dA$ og venstre side av Gauss lov blir:

$$\oint\!\!\oint \vec{E}\, d\vec{A} = E_r \iint \hat{e}_r \hat{e}_r\, dA = E_r \cdot 4\pi r^2$$

Dette er gyldig for alle r.

Høyre side av Gauss lov:

i) for $r \le a$:

$$Q_{inne}/\varepsilon_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho(r)\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{r=0}^{r} \rho(r)\, 4\pi r^2 dr$$

Innalt med E_r for $r \leq a$ for venstre side av Gauss lov gir:

$$\frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r}{a} - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{r=0}^{r} \rho(r)\, 4\pi r^2\, dr$$

Deriver begge sider mht. r:

$$\frac{4\pi a^2 \rho_0}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{4}\frac{r^2}{a} - \frac{1}{3}\frac{r^3}{a^2}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(r) \cdot 4\pi r^2$$

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 a^2}{3}\left(\frac{1}{4}\frac{1}{a} - \frac{1}{3}\frac{r}{a^2}\right) = \frac{a\rho_0}{12}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{r}{a}\right)$$

For $r > a$ er $E_r = 0$ og $\rho(r) = 0$

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{a\rho_0}{12}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{r}{a}\right) & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

c) Nettoladning: $r \leq a$:

$$\int_{r=0}^{a} \rho(r) \cdot 4\pi r^2\, dr =$$

$$\frac{\rho_0 a^2}{3}\left(\frac{r}{a} - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) 4\pi r^2 \Big|_{r=0}^{a} = \underline{0}$$

Siden $\vec{E} = 0$ for $r > a$, og $Q_{inn}(r=a) = 0$ må nettoladning for området $0 \to r$, $r > a$ være null. Da $0 \to a$ inneholder 0 nettoladning, må også $a \to r$ inneholde 0 nettoladning. I samsvar med beregnet $\vec{E}$

$\cos\theta_1 = \frac{r_2}{r_1}$, $\cos\theta_3 = \frac{r_3}{r_1}$; og $r_2 = r_3$ pga symmetri

$$\vec{H}_{tot} = \frac{I}{2\pi r_2}\left(1 + \frac{r_2}{r_1}\cdot\cos\theta_1 + \frac{r_3}{r_1}\cdot\cos\theta_3\right) = \frac{I}{2\pi r_2}\left(1 + 2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right)$$

Numerisk: (Fig: $r_2 = 8$ cm, Ledet: $r_2 = 5$ cm).

$$\vec{H}_{tot}(r_2 = 8\text{cm}) = \frac{5\text{A}}{2\pi\cdot 0.08\text{m}}\left(1 + 2\cdot\frac{8^2}{8^2+10^2}\right)\vec{i} = 17.7\ \frac{\text{A}}{\text{m}}\ \vec{i}$$

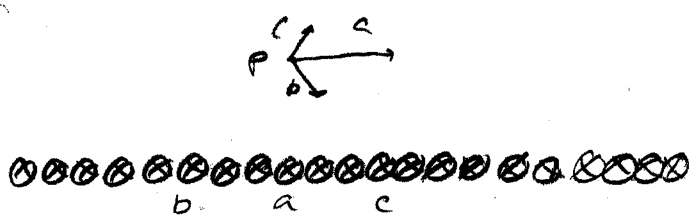
$$\vec{H}_{tot}(r_2 = 5\text{cm}) = \frac{5\text{A}}{2\pi\cdot 0.05\text{m}}\left(1 + 2\,\frac{5^2}{5^2+10^2}\right)\vec{i} = 22.3\ \frac{\text{A}}{\text{m}}\ \vec{i}$$

Uttrykt ved $B = \mu_0 H$:

$$\vec{B}(r_2 = 8\text{cm}) = 2.23\cdot 10^{-5}\ \text{T}\ \vec{i}$$

$$\vec{B}(r_2 = 5\text{cm}) = 2.80\cdot 10^{-5}\ \text{T}\ \vec{i}$$

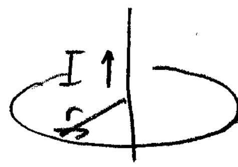
b) Strømførende plan:



Bidrag til magnetisk feltstyrke i punkt p: for leder plassert under punktet : $\vec{H} \parallel$ planet.
For leder b : gir $\delta\vec{H}$ komponent $\perp$ planet, men vi kan finne en leder (c i eksempelet) som gir et like stort, motsatt rettet bidrag til $\vec{H}_{tot}$, $\perp$ på planet. Dette gjelder for vilkårlig valg av (b) leder. Dette fører til at det er ingen

Oppgave 2

a) Amperes lov for en leder



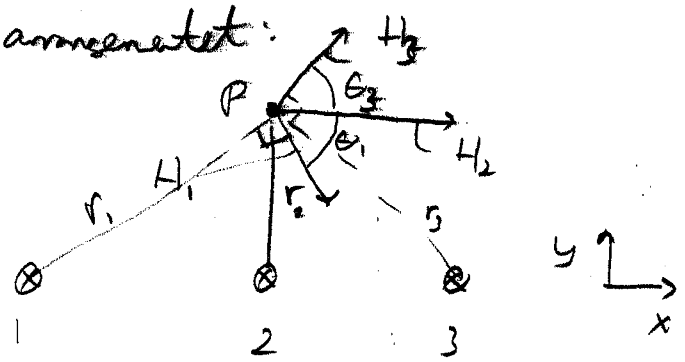
$$\oint \vec{H}\, d\vec{l} = I_{omsluttede} \quad ; \quad \vec{H} = H\, \vec{e}_\theta$$

Anvendt: velger integrasjonssti som en konsentrisk sirkel om lederen. Da er $\vec{H} \parallel d\vec{l} \Rightarrow \vec{H}\, d\vec{l} = H\, dl$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \oint dl = H \int_{\theta=0}^{2\pi} r\, d\theta = 2\pi r H = I_{omsluttede}.$$

$$\vec{H} = \frac{I_{enc}}{2\pi r}\, \vec{e}_\theta$$

For arrangementet:



Nummer lederne 1, 2, og 3. H_1, H_2, og H_3 er magnetfeltet i P satt opp av disse tre lederne (H_1 fra 1, osv)

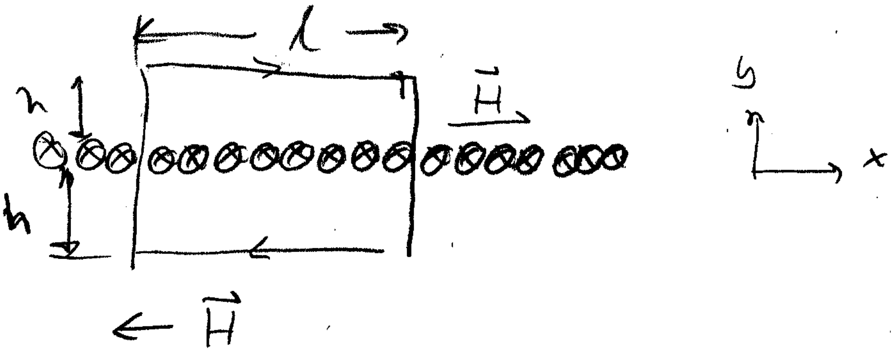
Vertikal komponentene av H_1 og H_3 er like store og motsatt rettet. Disse kansellerer. Ser på horisontal komponentene:

$$\vec{H}_{tot} = \vec{H}_2 + |\vec{H}_1| \cos\theta_1\, \vec{i} + |\vec{H}_3| \cos\theta_3\, \vec{i}$$

$$= \left(\frac{I}{2\pi r_2} + \frac{I}{2\pi r_1} \cdot \cos\theta_1 + \frac{I}{2\pi r_3} \cdot \cos\theta_3 \right) \vec{i}$$

nettokomponent av $\vec{H}$ $\perp$ planet. Bruk av amperes lov (se under) viser at $\vec{H}$ er uavhengig av avstand
$\Rightarrow$ dvs. magnetfeltet er homogent.

Bruker Amperes lov for å bestemme $\vec{H}$:



Velger integrasjonsvei som et rektangel med sider som er enten $\perp$ eller $\parallel$ strømførende leder.

Amperes lov:

$$\oint \vec{H}\,\vec{dl} = \underbrace{\overbrace{\int \vec{H}\cdot\vec{dl}}^{\vec{H}\perp\vec{dl}}}_{2\text{ sidekanter}} + \underbrace{\overbrace{\int \vec{H}\cdot\vec{dl}}^{\vec{H}\parallel\vec{dl}}}_{2\text{ langsider}} = 2\cdot l H = n_l l:$$

hvor n_l er antall ledninger pr lengdeenhet, $n_l = 500\,m^{-1}$
$n_l \cdot l$: antall ledere i lengden l.

Dette gir: $\vec{H} = \frac{n_l \cdot I}{2}\vec{i} = \frac{500}{2}\cdot m^{-1}\cdot 5A = 1.25\cdot 10^3 A/m\,\vec{i}$

$\vec{H}$ er motsatt rettet for $y<0$:

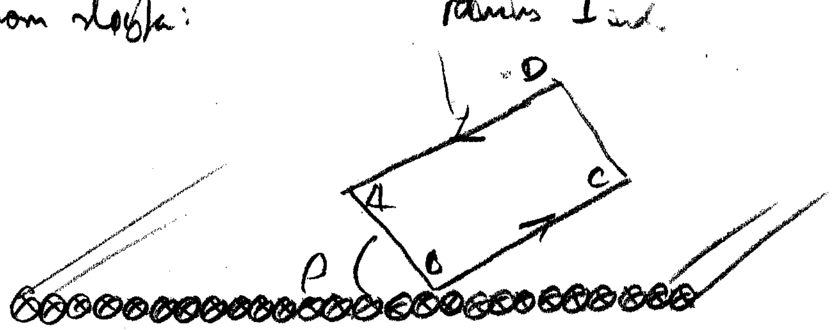
$$\vec{H} = \begin{cases} 1.25\cdot 10^3\ A/m\,\vec{i} & y>0 \\ -1.25\cdot 10^3\ A/m\,\vec{i} & y<0 \end{cases}$$

$(1.57\cdot 10^{-3}$ Tesla$)$

Siden $\vec{H}$ ikke er avhengig av h, er dette også magnetfeltet i en avstand 5 cm over planet:

$$\underline{\underline{\vec{H}(h=5cm) = 125\ A/m\ \vec{i}}}$$

c) Fluks gjennom sløyfa:



Fluks gjennom sløyfa:

$$\phi_B = \iint \vec{B}\, d\vec{A} = \mu_0 \cdot \iint \vec{H} \cdot d\vec{A} = \mu_0 \iint H \cdot dA \cos(\tfrac{\pi}{2} - \beta)$$

Siden H er uavhengig av h, kan vi sette H på utsiden av integrasjonstegnet;

$$\phi_B = \mu_0 H \cdot \cos(\tfrac{\pi}{2} - \beta) \cdot \iint dA = \mu_0 H \cdot \cos(\tfrac{\pi}{2} - \beta) \cdot A$$

hvor A er arealet $= a \cdot b = 0.2m \cdot 0.1m = 0.02\ m^2$

Nå er $I = I_0(1 - \alpha t)$, $I_0 = 10A$:

$$\phi_B = \mu_0 \frac{nL}{2} \cdot I_0 (1 - \alpha t) \cdot \sin\beta \cdot A$$

Indusert elektromotorisk kraft:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} = \alpha \mu_0 \frac{nL}{2} \cdot I_0 \cdot \sin\beta \cdot A$$

$\mathcal{E}$ setter opp en strøm I_{ind}:

$$I_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \alpha \frac{\mu_0}{2R} n_L \cdot I_0 \cdot \sin\beta \cdot A$$

med retning som angitt på figur (mot klokka) i følge Lenz's lov.

Finner α:

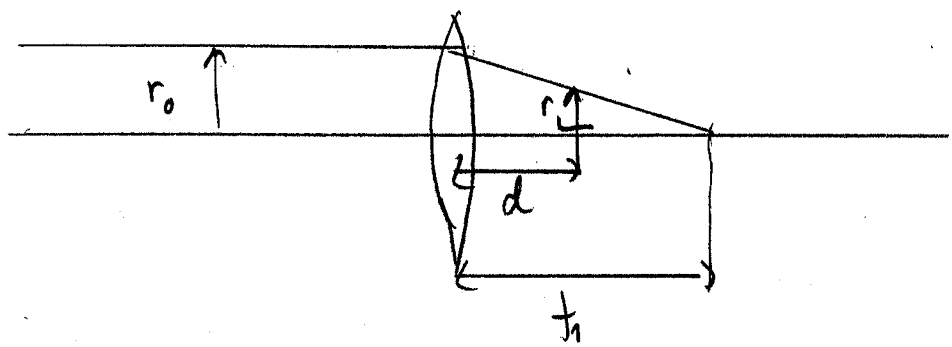
$$\alpha = \frac{2 I_{ind} \cdot R}{\mu_0 n_L \cdot I_0 \cdot \sin\beta \cdot A}$$

$$= \frac{2 \cdot 0.2 \cdot 10^{-3} A \cdot 2\Omega}{4\pi \cdot 10^{-7} A m^{-1} \cdot 500 m^{-1} \cdot 10A \cdot \sin 30 \cdot 0.02 m^2}$$

$$\underline{\underline{= 12.7 s^{-1}}}$$

Oppgave 3.

Ved innfallende parallell strålebunt inn mot den konvergerende linsen:



Trekker inn f_1.
Geometri:

$$\frac{r_1}{f_1 - d} = \frac{r_0}{f_1} \; ; \; \Rightarrow \underline{r_1 = \frac{r_0}{f_1}(f_1 - d)} \quad \text{q.e.d.}$$

Ved avbildning i konvergerende linse:

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1}$$

$$u_1 \to \infty \quad \Rightarrow \quad v_1 = f_1$$

Objekt for avbildning i divergerende linse har nå en objektavstand

$$u_2 = -(v_1 - d)$$

(negativ pga tegnkonvensjon)

Får da

$$\frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} = -\frac{1}{|f_2|}$$

$$\frac{1}{v_2} = -\frac{1}{|f_2|} - \frac{1}{u_2} = -\frac{1}{|f_2|} + \frac{1}{f_1 - d}$$

$$v_2 = \frac{1}{\frac{1}{f_1-d} - \frac{1}{|f_2|}} = \underline{\underline{\frac{|f_2|(f_1-d)}{|f_2| - f_1 + d}}} \qquad \text{q.e.d.}$$

b Fra figuren i oppgaveteksten og i henhold til definisjon av f_{eff}:

$$\frac{f_{eff}}{r_0} = \frac{v_2}{r_1}$$

$$\underline{\underline{f_{eff}}} = \frac{r_0}{r_1} \cdot v_2 = \frac{f_1}{f_1 - d} \cdot \frac{|f_2|(f_1-d)}{|f_2| - f_1 + d} = \underline{\underline{\frac{f_1 |f_2|}{|f_2| - f_1 + d}}}$$

Numerisk:

$f_1 = 10$ cm , $f_2 = -15$ cm

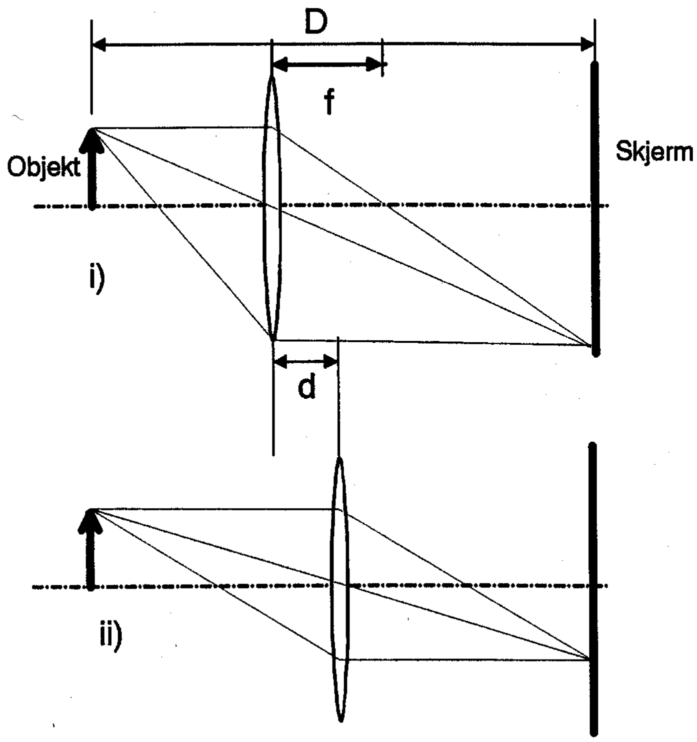
d fra 0 til 7 cm.

Maks f_{eff} ved minimum d:

$$f_{eff}(d=0) = \frac{15 \cdot 10}{15-10} \text{ cm} = \underline{\underline{30 \text{ cm}}}$$

Min f_{eff} ved maks d:

$$f_{eff}(d=7\text{cm}) = \frac{15 \cdot 10}{15-10+7} \text{ cm} = \underline{\underline{12.5 \text{ cm}}}$$



c)Situasjonen er som følger (det er ikke krav til figur ved besvarelse, men det er illustrerende): To posisjonene for en konvergerende linse som gir reelle bilder på observasjons-skjermen er vist i figuren til venstre. Med objektavstand u og bildeavstand v, gjelder for avbildningen:

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f}$$

På grunn av at summen av objekt og bildeavstand er gitt ved D:

$$u+v=D$$

får vi en lign. med 1 ukjent (her kan det velges u eller v):

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{D-u}=\frac{1}{f}$$

Omarbeidet:

$$f\cdot(D-u+u)=(D-u)\cdot u$$

som gir 2. gradslikning i u:

$$u^2-D\cdot u+f\cdot D=0$$

Denne har løsningen:

$$u=\frac{D}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{D^2-4Df}\,.$$

Dvs., vi har to objektavstander:

$$u_1=\frac{D}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{D^2-4Df}\text{ og }u_2=\frac{D}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{D^2-4Df}\,.$$

Avstanden d mellom linsen for disse to plasseringene av linsa er:

$$d=u_1-u_2=\left(\frac{D}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{D(D-4f)}\right)-\left(\frac{D}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{D(D-4f)}\right)=\sqrt{D(D-4f)}\qquad\text{q.e.d.}$$

Forstørrelsen, er gitt ved:

$$\frac{y_{bilde}}{y_{objekt}}=\frac{v}{u}$$

Forholdet mellom størrelsene på bildene ved de to plasseringene av linsa er gitt ved:

$$\frac{y_{bilde,1}}{y_{bilde,2}}=\frac{y_{bilde,1}/y_{objekt}}{y_{bilde,2}/y_{objekt}}=\left(\frac{v_1}{u_1}\right)\left(\frac{u_2}{v_2}\right)$$

Objektavstandene er gitt over, og de respektive bildeavstandene finnes ved:

$$v_1=D-u_1=\frac{D}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{D^2-4Df}\text{ og }v_2=D-u_2=\frac{D}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{D^2-4Df}$$

Forholdet mellom størrelsene på bildene blir da:

$$\frac{y_{bilde,1}}{y_{bilde,2}}=\left(\frac{v_1}{u_1}\right)\left(\frac{u_2}{v_2}\right)=\left(\frac{D-\sqrt{D^2-4Df}}{D+\sqrt{D^2-4Df}}\right)\cdot\left(\frac{D-\sqrt{D^2-4Df}}{D+\sqrt{D^2-4Df}}\right)=\underline{\underline{\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2}}$$