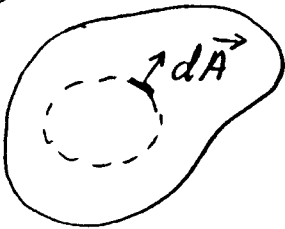


Forslag til løsning.

Oppgave 1

a/

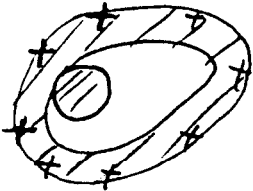


I likevekt kan det ikke være noe elektrisk felt i ledere, dvs. $\vec{E} = 0$ (ellers vil det gå strøm).
 Danner så et lukket volum inne i lederen og benytter Gauss lov ved å integrere over overflaten til dette volumet. Med $\vec{E} = 0$ gir dette

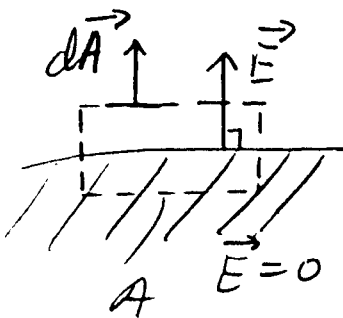
$$\Phi = \epsilon_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

Dvs. nettoladningen $\Phi = 0$ innefor et slikt volum.

Følgelig må all nettoladning være plassert på overflaten.



Når en ladet metallkule berører innsiden av et lukket metallkulerom vil hele ladningen overføres til ytteflaten av systemet da det ikke kan være nettoladning på innerflaten i likevekt (da $\vec{E} = 0$ også i hulrommet).

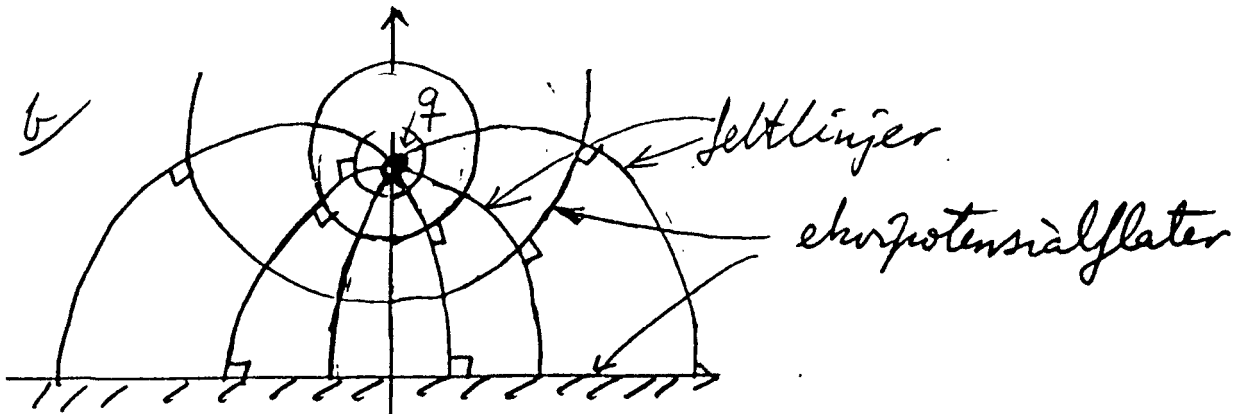


For å finne sammenhengen mellom \vec{E} og σ langs en metalloverflate kan en benytte Gauss lov. Ved å integrere over overflaten til det skisserte volumet finner en

$$\epsilon_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 EA = \Phi = \sigma A$$

$$\underline{\underline{\sigma = \epsilon_0 E}}$$

②



b/

(„hjelpladning“
for å skissere
dipolfeltet) $\rightarrow q \phi$

Skisse av feltlinjer og
ekvipotentialflater som står
vinkelrett på hverandre.

c/ Det elektriske feltet er gitt ved $\vec{E} = -\nabla V$. For
å finne overflateladningen trenger vi bare \vec{E} for $z=0$
der bare z -komponenten E_z er forskjellig fra 0.

$$E_z = - \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z-a}{(\rho^2+(z-a)^2)^{3/2}} - \frac{z+a}{(\rho^2+(z+a)^2)^{3/2}} \right]$$

$$\xrightarrow{z \rightarrow 0} - \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}$$

Overflateladningen blir følgende

$$\sigma = \epsilon_0 E_z = - \frac{q}{2\pi} \frac{a}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}$$

(3)

Oppgave 2.

a) Sammenhengen mellom overflateledning σ og elektrisk felt \vec{E} blir som i oppgave 1 slik at

$$\sigma = \epsilon_0 E$$

Nå er videre $\sigma = Q/A$ og $E = V/d$ der V er spenningen mellom platene slik at en finner

$$\frac{Q}{A} = \epsilon_0 \frac{V}{d}$$

og kapasitansen blir

$$C_0 = \frac{Q}{V} = \underline{\underline{\epsilon_0 \frac{A}{d}}}$$

Med konstant relativ permittivitet ϵ_r blir kapasitansen

$$C = \epsilon_r C_0 = \underline{\underline{\epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}}}$$

Numerisk

$$C = 5,6885 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \frac{1,2 \cdot 10^{-2} m^2}{3 \cdot 10^{-3} m} = 198 \cdot 10^{-12} \frac{As}{V} \approx \underline{\underline{200 \mu F}}$$

b) Med dielektrisk medium vil overflateledning $\sigma = \epsilon_0 E$ erstattes med

$$D = \sigma = Q/A$$

Dette er også verdien til D mellom platene, dvs

$$D_z = D = D(z) = \underline{\underline{Q/A}} \quad (= \text{konst})$$

da det ikke finnes fri romledning mellom platene.

Det elektriske feltet følger nå fra $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$

$$E_z = E = E(z) = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} D = \underline{\underline{\frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} \frac{Q}{A}}} \quad \left(\sigma = \frac{Q}{A} \right)$$

(4)

Polariseringen blir følgende

$$P_2 = P = P(z) = D - \epsilon_0 E = \underline{\underline{\sigma \left(1 - \frac{1}{a+bz}\right)}}$$

Potensialforskjellen (spenningen) mellom platene finnes nå ved å integrere det elektriske feltet

$$\begin{aligned} V &= -\int \vec{E} d\vec{s} = -\int_d^0 E_z dz = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^d \frac{dz}{a+bz} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{b} \ln(a+bz) \right]_0^d \\ &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{1}{b} (\ln(a+bd) - \ln a) = \underline{\underline{\frac{\sigma}{\epsilon_0 b} \ln\left(1 + \frac{b}{a}d\right)}} \end{aligned}$$

Kapasitansen blir

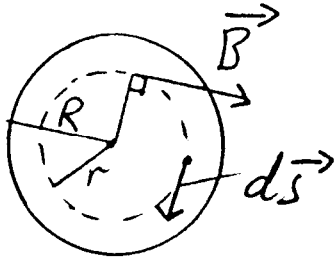
$$C_V = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\epsilon_0 b} \ln\left(1 + \frac{b}{a}d\right)} = \underline{\underline{\epsilon_0 \frac{bA}{\ln\left(1 + \frac{b}{a}d\right)}}}$$

Fri romladningstetthet er gitt ved $\rho = \nabla \cdot \vec{D}$ og samlet (netto) er gitt ved $\rho_s = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$. Følgelig er bunden romladningstetthet gitt ved

$$\rho_b = \rho_b(z) = \rho_0 - \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} - \nabla \cdot \vec{D} = -\nabla \cdot \vec{P} = \frac{\partial P_2}{\partial z} = \underline{\underline{\frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{b}{(a+bz)^2}}}$$

Oppgave 3

a/



Benytter her Ampères lov og legger integrasjonskurven i en avstand r fra sentrum. Dette gir

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = H \cdot 2\pi r = I = I(r)$$

$$H = \frac{I(r)}{2\pi r}$$

der $I(r)$ er strømmen innenfor radien r . Med jåmn fordeling over ledertverrsnittet blir da

$$I(r) = \begin{cases} I \left(\frac{r}{R}\right)^2 & \text{for } r < R \\ I & \text{for } r > R \end{cases}$$

Med $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ blir følgende

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \quad r < R$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad r > R$$

Magnetfeltet blir tangensielt til en slik jernring. \vec{H} -feltet er da kontinuerlig som en også kan se direkte fra Ampères lov ovenfor. ($\oint \vec{H} d\vec{s} = 0$ med null overflatestrøm, dvs. tangensialkomponenten til \vec{H} må være den samme på begge sider av overflaten.) Følgelig har en innenfor jernringen

$$\vec{B} = \mu_{\text{rel}} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r > R)$$

b) Motstanden til ledere er

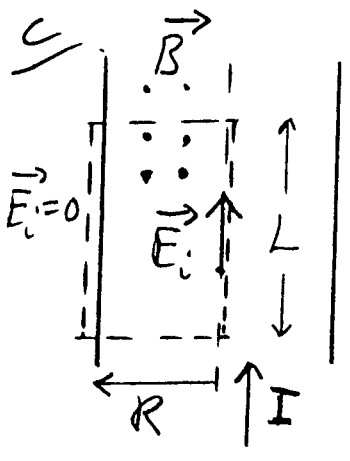
$$R = \rho \frac{L}{A} \quad \text{der } A = \pi R^2$$

slik at spenningen og det elektriske feltet blir

$$V = RI = \rho \frac{L}{\pi R^2} I \quad \text{og} \quad E = \frac{V}{L} = \frac{\rho I}{\pi R^2}$$

Nummerisk

$$V = 2,82 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Vm}}{\text{A}} \frac{400\text{m}}{\pi (5 \cdot 10^{-3})^2 \text{m}^2} \cdot 35\text{A} = \underline{\underline{5,0 \text{ V}}}$$



Bestemmer først magnetisk fluks mellom sentrum og ytterradius R på et stykke av ledere av lengde L.

$$\Phi_B = \int \vec{B} d\vec{A} = L \int_0^R B dr = \frac{L \mu_0 I}{2\pi R^2} \int_0^R r dr = \underline{\underline{L \frac{\mu_0 I}{4\pi}}}$$

Indusert ems

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_i d\vec{s} = L E_i = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$E_i = - \frac{1}{L} \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \dot{I} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{dt} (I_0 \sin \omega t) \\ = \underline{\underline{- \frac{\mu_0}{4\pi} \omega I_0 \cos \omega t}}$$